MATERIAL DE APOIO PEDAGÓGICO PARA APRENDIZAGENS

3º Ano

Ensino Médio

2023

MAPA SAEB
Matemática

GOVERNO DO ESTADO DE MINAS GERAIS
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DE MINAS GERIAS
ESCOLA DE FORMAÇÃO E DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE EDUCADORES

SUMÁRIO

MATEMÁTICA

ANEXO

MATERIAL DE APOIO PEDAGÓGICO PARA APRENDIZAGENS – MAPA SAEB 2023

ANO DE ESCOLARIDADE
3º ano

SEGMENTO
Ensino Médio

COMPONENTE CURRICULAR
Matemática

TÓPICO:	DESCRITOR:
I. Espaço e Forma.	D1 - Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade. D2 - Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais. D3 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas. D4 - Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: Semelhança e proporcionalidade, relações métricas do triângulo retângulo e poliedros.

DURAÇÃO: 5 aulas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS:

A) CONTEXTUALIZAÇÃO/ABERTURA:

Olá, professor, nos planejamentos que se segue, iremos trabalhar a maioria dos descritores do SAEB de modo a preparar os estudantes para a realização das avaliações externas, outras atividades podem ser utilizadas para a complementação e aprofundamento ou de modo a abordar descritores que não foram contemplados.

B) DESENVOLVIMENTO:

AULA 1

Comece apresentando situações cotidianas envolvendo "semelhança", como:

- Fotocópia ampliada ou reduzida.
- Planta ou maquete arquitetónica.
- Cenário de *videogame.*

Em seguida, discuta com os estudantes a relação entre semelhança e proporcionalidade. Pondere para a turma que as "medidas" (unidimensionais ou multidimensionais) são proporcionais, mas outras informações, como os "ângulos", se mantêm. Compare com a seguinte situação: ao duplicar uma receita culinária, as quantidades dos ingredientes são duplicadas, mas a temperatura não.

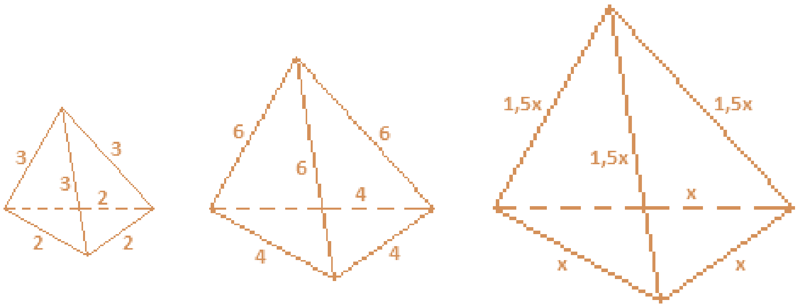
Comece revisando uma situação familiar de semelhança: a semelhança de triângulos. Explique a definição. Depois, explique que a intenção dos "casos" de semelhança é facilitar o reconhecimento de triângulos semelhantes, evitando ter que testar seis itens: as medidas dos três lados (proporcionais) e as medidas dos três ângulos (iguais). Faça exemplos, sempre com figuras.

Imagem 1 - Os três casos de semelhança de triângulos.

Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Generalize para figuras tridimensionais.

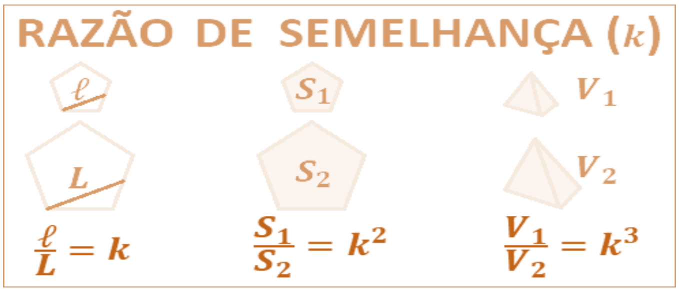
Imagem 2 - Semelhança entre sólidos (figuras 3D).



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Em seguida, introduza a definição de **razão de semelhança.** Explique e dê exemplos do seguinte resultado: se em duas figuras os segmentos homólogos têm razão de semelhança igual a k, então a razão de semelhança entre as respectivas áreas vale k^2. No caso de figuras tridimensionais, a razão de semelhança entre os respectivos volumes vale k^3. Novamente, utilize figuras.

Imagem 3 - Razão de semelhança (k).



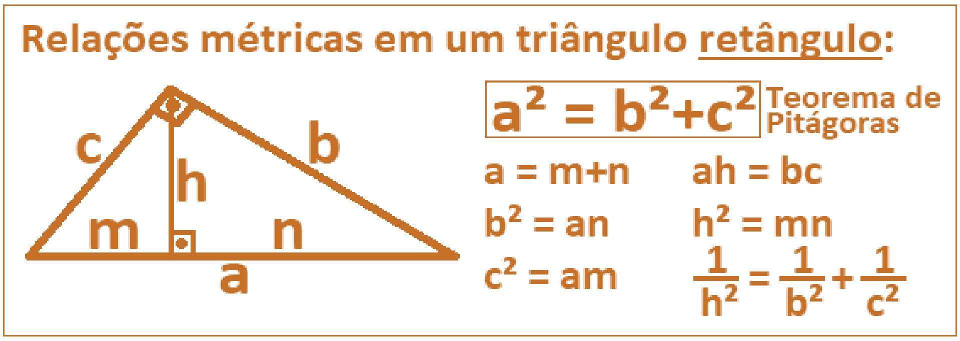
Fonte: (WASHINGTON, 2023)

AULA 2

O que é uma relação métrica? Desenhe na lousa um triângulo retângulo e indique as medidas dos dois catetos. (Lembre-se de desenhar a indicação obrigatória de ângulo reto.) Pergunte aos estudantes como obter a hipotenusa. Provavelmente um ou mais de um deles vai remeter ao teorema de Pitágoras. (Não é necessário executar os cálculos). Utilize essa situação como mote para explanar o que é uma relação métrica do triângulo retângulo. Comente que existem outras além do teorema de Pitágoras. Por fim, comente que existem relações métricas em um triângulo "qualquer" – que não serão abordadas aqui.

Comece apresentando as relações métricas do triângulo retângulo propriamente ditas. Resolva um ou dois exercícios para ilustrar. Depois, divida a turma em sete grupos e passe um exercício para cada grupo. Cada exercício deve envolver uma relação métrica **diferente.** Ao final, peça que cada grupo explique como resolveu o respectivo exercício.

Imagem 4 - Relações métricas do triângulo retângulo.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

AULA 3

Para começar esta aula, apresente e dê exemplo da **recíproca** do teorema de Pitágoras. Seu enunciado pode ser posto da seguinte forma: "Se um triângulo de lados de medidas a, b, c – sendo a a maior medida – satisfaz à relação $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é um triângulo retângulo."

Continuando, mostre que as relações métricas do triângulo retângulo são úteis não somente na geometria plana, mas também na geometria espacial. É especialmente importante mostrar que problemas de geometria espacial são frequentemente resolvidos fazendo-se na figura "cortes" adequadamente escolhidos. Portanto, a geometria espacial depende fortemente da geometria plana como base de trabalho.

AULA 4

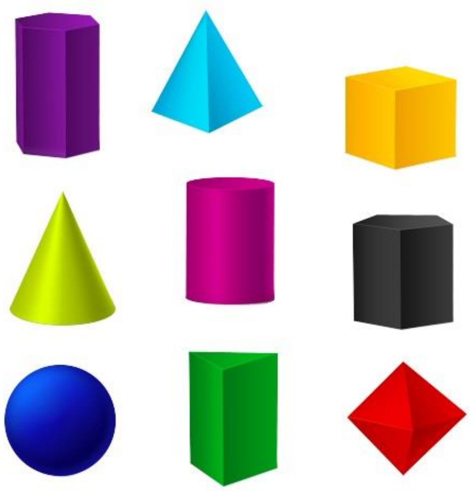
Indague a turma a respeito de poliedros ou corpos redondos no cotidiano. Possíveis respostas:

- Esfera: bola (de futebol, vólei, basquete, tênis de mesa etc.).
- Paralelepípedo reto retângulo: caixa de sapatos.
- Cilindro: "macarrão" de academia para aulas na piscina.
- Cubo mágico.

Para começar, recorde o formato dos sólidos geométricos mais comuns. Explique com clareza e precisão quais são as suas características. Em particular:

- Caracterize poliedro.
- Caracterize sólido redondo.
- Explique os termos "reto" e "oblíquo".

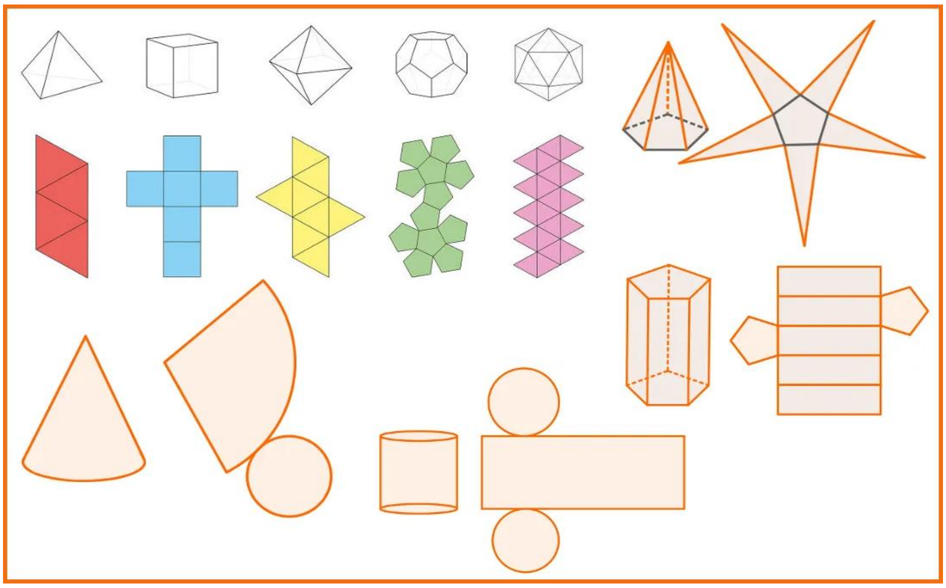
Imagem 5 - Alguns sólidos geométricos.



Fonte: (FREEPIK, 2021)

Em seguida, apresente e explique as planificações de alguns sólidos geométricos.

Imagem 6 - Planificações de alguns sólidos geométricos.

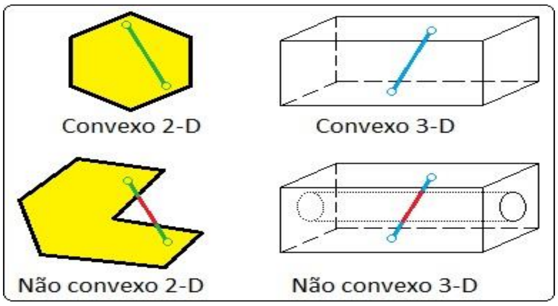


Fonte: (BRASIL ESCOLA, 2017)

AULA 5

Primeiro, defina o que é uma figura convexa. Comece com figura plana (mais simples) e depois apresente para figura tridimensional.

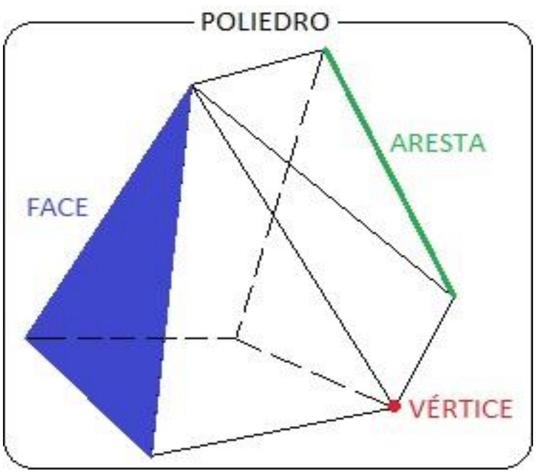
Imagem 7 - Convexidade e não convexidade.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Para um poliedro, defina: vértice – aresta – face.

Imagem 8 - Poliedro: vértice, aresta e face.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Em seguida, apresente a **<u>relação de Euler</u>** para poliedros convexos. Dado um sólido convexo, sejam:

- $V =$ quantidade de vértices.
- $A =$ quantidade de arestas.
- $F =$ quantidade de faces.

Então tem-se o seguinte resultado:

$$\boxed{V - A + F = 2} \quad \text{ou} \quad \boxed{V + F = A + 2}$$

Dê diversos exemplos para uma boa compreensão!

Atenção: Para esta aula também será necessário materiais como: papel, cola, tesouras etc.

Divida a turma em grupos – no mínimo seis e no máximo dez grupos. Instrua cada grupo a construir um sólido geométrico diferente dos outros grupos (pode ser levado planificações de alguns). Ao término, cada grupo deve apresentar o sólido para o restante da turma. Deve também dizer tudo o que souber a respeito daquele sólido. Se for o caso, deve apresentar a relação de Euler para o sólido.

RECURSOS:

Quadro ou lousa, caderno, calculadora, atividades impressas.

Aplicativos para celular ou computador, tais como GeoGebra®, Wolfram Alpha® etc.

PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO:

Ao final desta parte, o estudante deverá ser capaz de realizar os tópicos a seguir:

- Reconhecer figuras semelhantes, incluindo por proporcionalidade.
- Saber trabalhar com semelhança e razão de semelhança.
- Em particular, trabalhar com semelhança de triângulos.
- Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos.
- Saber identificar vértices, arestas e faces de poliedros.
- Saber identificar sólidos convexos.
- Conhecer a relação entre quantidade de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo (conhecida como relação de Euler).
- Conhecer as relações métricas dos triângulos retângulos.
- Saber aplicar em situação problema envolvendo figuras planas.
- Saber aplicar em situação problema envolvendo figuras espaciais.

ATIVIDADES

1 – Uma caixa d'água tem o formato de um cubo de lado igual a 2 m.

a) Mostre que, se as medidas de todos os lados forem duplicadas (i.e., alteradas para 4 m) então o volume total da caixa d'água não será duplicado.
b) O novo volume é quantas vezes maior do que o antigo?

2 – Mostre que todo triângulo cujas medidas dos lados são (diretamente) proporcionais aos números 3, 4 e 5 é um triângulo retângulo.

3 – Uma confecção de calçados solicitou a uma indústria de caixas, sua fornecedora, um novo modelo de caixa de sapatos femininos. A caixa antiga tem o formato de um paralelepípedo reto retângulo com as três dimensões de medidas diferentes entre si. A caixa nova deve manter a proporção da caixa anteriormente utilizada, porém com volume 50% maior. Para atingir esse objetivo, a medida de cada lado deve ser aumentada em, aproximadamente:

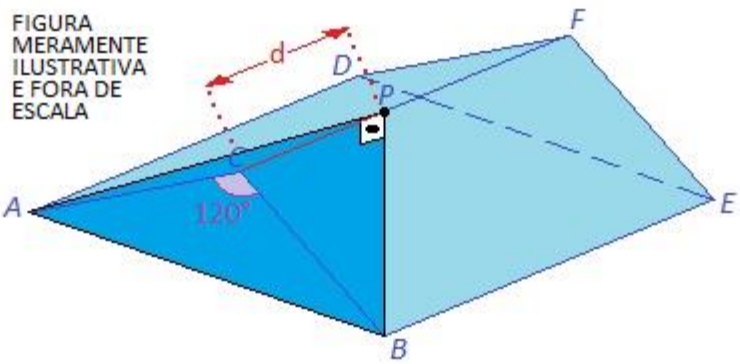
a) 14,5%
b) 16,7%
c) 25%
d) 37,5%
e) 50%

4 – Um pedreiro, sem muita instrução formal, executa o seguinte procedimento para verificar se uma parede em construção está vertical. Marca um ponto no chão a 40 cm da parede (perpendicularmente). No mesmo alinhamento, marca na parede outro ponto a 60 cm do chão (perpendicularmente). Finalmente, mede a distância entre os dois pontos marcados.

- Se essa distância for igual a 1 metro, a parede está vertical.
- Se essa distância for superior a 1 metro, a parede está inclinada "para fora" em relação às demarcações dos pontos.
- Se essa distância for inferior a 1 metro, a parede está inclinada "para dentro".
- Explique por que esse procedimento funciona.

5 – Reconsidere a Imagem 04 do texto. Mostre que a relação métrica $ah = bc$ pode ser deduzida utilizando-se (duas vezes) a fórmula da área de um triângulo.

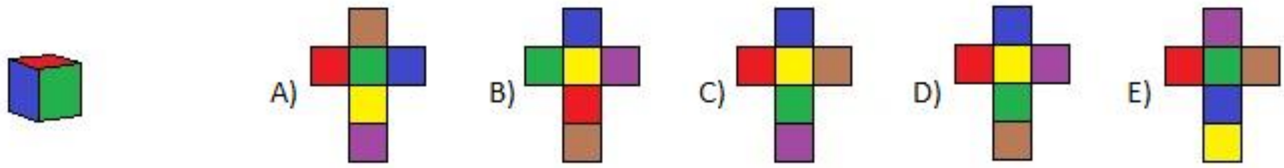
6 – Um prisma reto $ABCDEF$ possui como base um triângulo isósceles cuja base tem medida $17{,}3$ cm e cujos outros dois lados têm medida 10 cm. Nesse triângulo, o maior ângulo mede $120°$. O comprimento do prisma é de 15 cm.



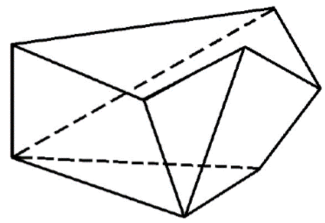
Deseja-se efetuar um corte nesse prisma, extraindo-se dele uma pirâmide APB, de sorte que o ângulo $A\hat{P}B$ seja um ângulo reto. Seja d a distância do vértice C ao ponto de corte P (observe a figura). Assinale a alternativa que melhor se aproxima do valor dessa distância d:

a) $d \approx 6$ cm.
b) $d \approx 7$ cm.
c) $d \approx 8$ cm.
d) $d \approx 9$ cm.
e) $d \approx 10$ cm.

7 – Assinale qual das alternativas pode ser a planificação do cubo ilustrado:

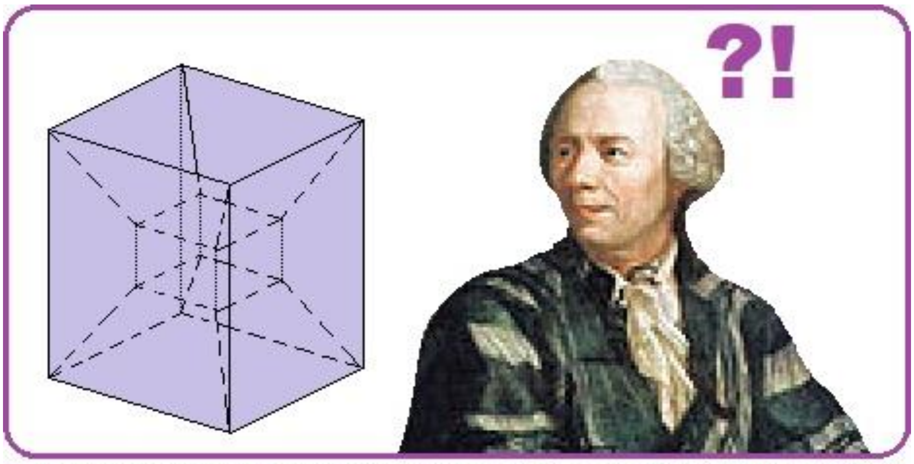


8 – O sólido da figura a seguir possui quantos vértices, quantas arestas e quantas faces?



9 – Considerando-se a Terra aproximadamente como uma esfera, seu raio médio é de 6.371 km. Calcule a distância percorrida por um explorador que decida fazer a circum-navegação do planeta através de uma circunferência máxima, isto é, cujo raio seja igual ao raio médio da Terra.

10 – Mostre que o poliedro a seguir satisfaz à relação de Euler $V - A + F = 2$, porém **<u>não é</u>** um poliedro convexo. Explique como isso é possível.



Fonte do retrato de Euler: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

REFERÊNCIAS

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB:** documento de referência do ano de 2001.

FREEPIK. **Vetor grátis conjunto transparente de corpo sólido.** [s. l.], 20 de janeiro de 2021. Disponível em: https://br.freepik.com/vetores-gratis/conjunto-transparente-de-corpo-solido_5966852.htm. Acesso em: 13 jul. 2023.

LEONHARD EULER. In: **WIKIPÉDIA**, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2023. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler. Acesso em: 13 jul. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: educação infantil e ensino fundamental. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 05 fev. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino fundamental - anos finais. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 05 fev. 2023

RAIO TERRESTRE. In: **WIKIPÉDIA,** a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2023. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Raio_terrestre. Acesso em: 14 jul. 2023.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. Planificação de sólidos geométricos. **Brasil Escola,** [s. l.], 11 de abril de 2017. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/planificacao-solidos-geometricos.htm. Acesso em: 13 jul. 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte, **Os três casos de semelhança de triângulos,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte, **Semelhança entre sólidos (figuras 3D),** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte, **- Razão de semelhança (k),** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte, **Relações métricas do triângulo retângulo,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Convexidade e não convexidade,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Poliedro: vértice, aresta e face,** Belo Horizonte, 2023.

TÓPICO:	DESCRITOR:
I. Espaço e Forma.	D5 - Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).
III. Números e Operações. Álgebra e Funções.	D30 - Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: Razões e funções trigonométricas.

DURAÇÃO: 5 aulas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A) CONTEXTUALIZAÇÃO/ABERTURA:

Peça aos estudantes que identifiquem situações no cotidiano nas quais aparece um ângulo reto. Exemplos:

- Quinas dentro de um cômodo em uma casa ou apartamento.
- Ângulos e demarcações em quadras de esportes.
- Em muitos objetos: celular, televisor, livro, teclado de computador, cadeira, espelho, mesa, edifício, porta, ladrilho, box de banheiro etc.

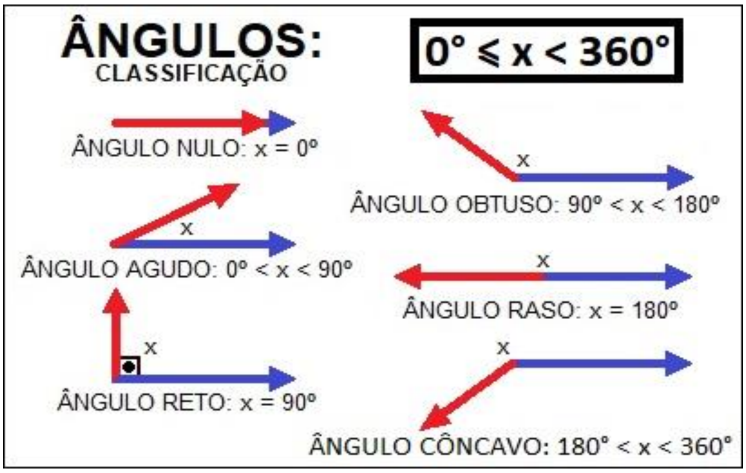
Explique que, em diversas situações, o ângulo reto "otimiza" uma determinada função ou finalidade.

B) DESENVOLVIMENTO:

AULA 1

Comece explicando a etimologia da palavra: TRI = três; GONO = ângulo; METRIA = medida; portanto, trigonometria significa "medições no triângulo". O próximo passo é recordar a definição e classificação de ângulo.

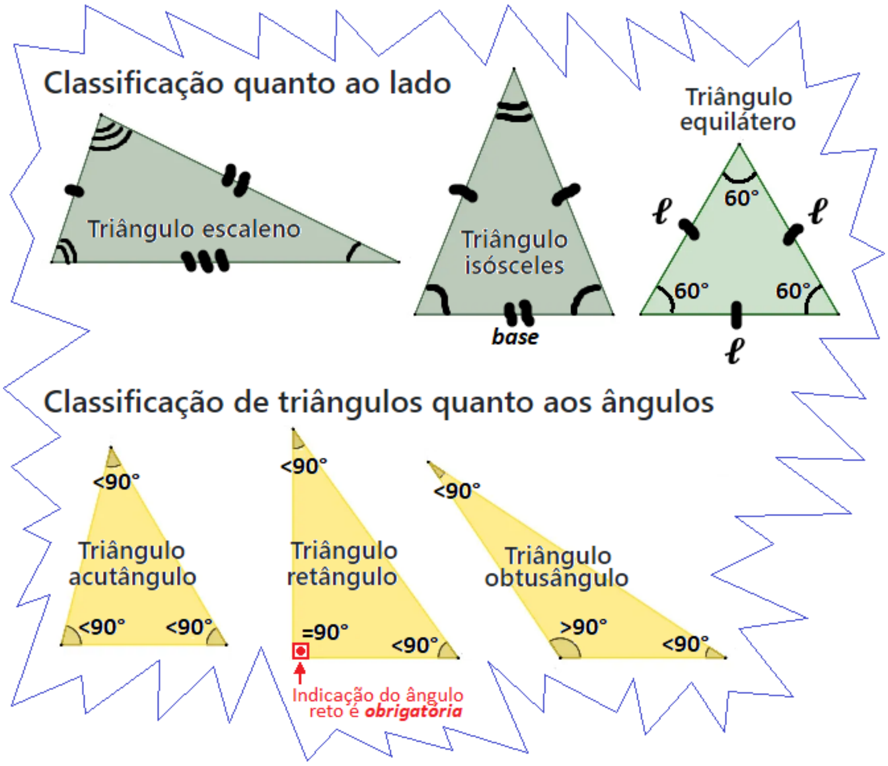
Imagem 01 - Classificação de ângulo (nomenclatura).



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Em seguida, apresente a classificação de triângulo (mais uma nomenclatura).

Imagem 02 - Classificação de triângulo (nomenclatura).



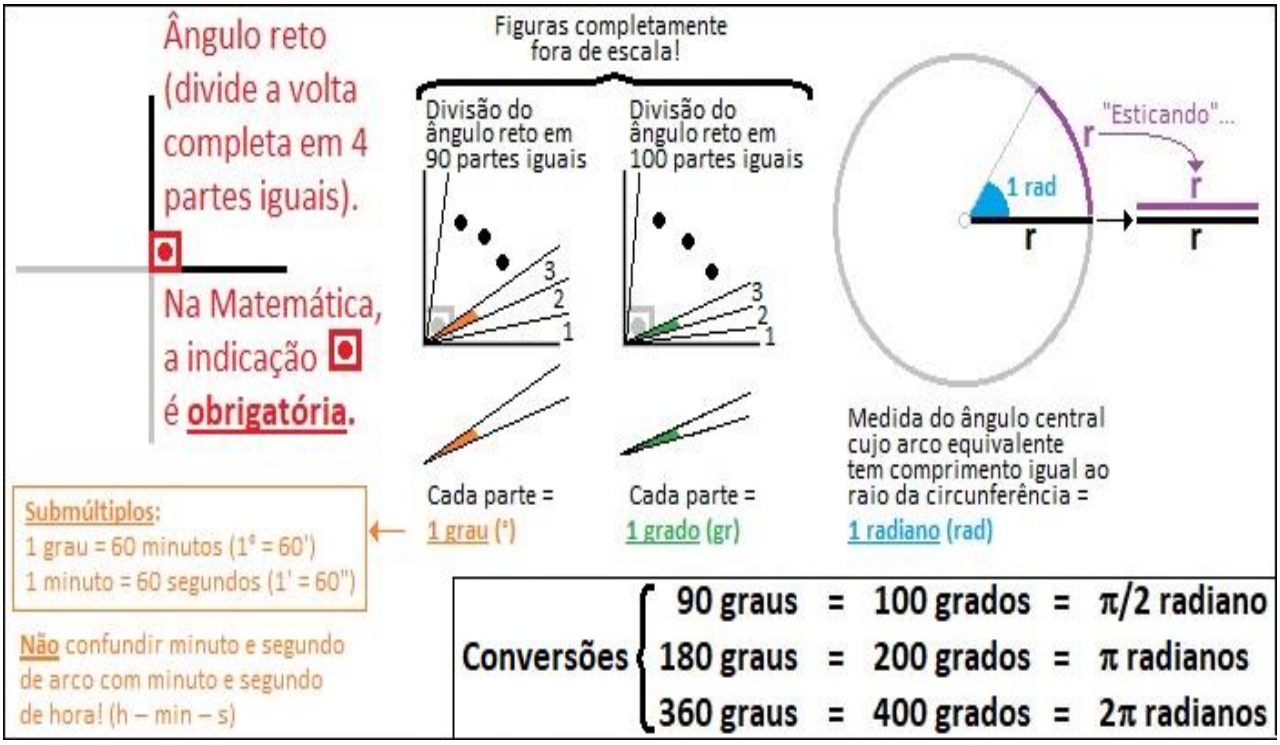
Fonte: Adaptado (BRASIL ESCOLA, 2023)

Para encerrar esta parte, faça exemplos e depois proponha diversos exercícios para a turma. Corrija os exercícios junto com os estudantes.

AULA 2

O objetivo desta parte é unicamente familiarizar os estudantes com as unidades de medidas de ângulos. Essa familiarização é muito importante para tudo o que vem depois. Assim, apresente as unidades, explique com exemplos suficientes e conduza exercícios.

Imagem 03 - Unidades de medida de ângulo.



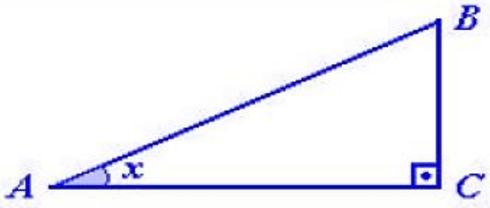
Fonte: (WASHINGTON, 2023)

AULA 3

Desenhe um triângulo retângulo na lousa e apresente a trigonometria no triângulo retângulo, introduzindo a nomenclatura de seno, cosseno e tangente. Faça exemplos numéricos.

Imagem 04 - Trigonometria no triângulo retângulo.

Funções Trigonométricas do Ângulo Agudo



$$\operatorname{sen} x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{AC}{BC}$$

Alguns Valores Notáveis

Ângulo em graus	0°	30°	45°	60°	90°
Ângulo em radianos	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen} x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	não existe

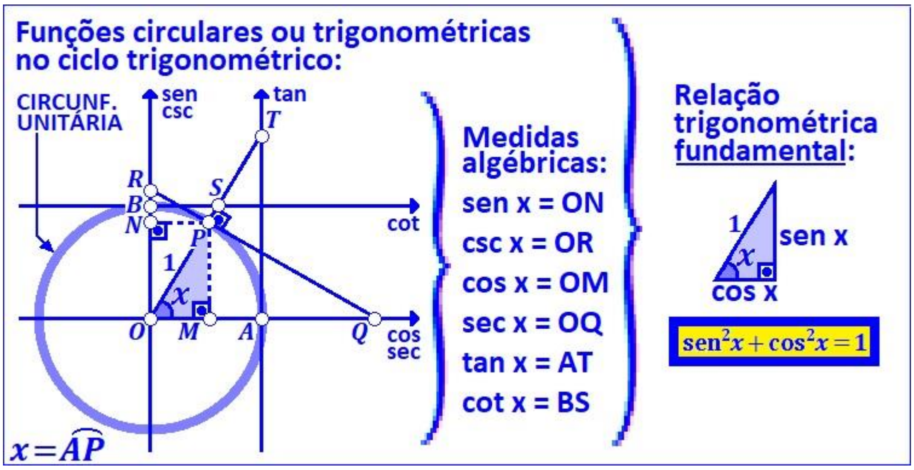
Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Em seguida, divida a turma em seis grupos e proponha um exercício para cada grupo: dois envolvendo seno, dois envolvendo cosseno e dois envolvendo tangente. Depois, proceda à discussão e correção conjunta.

AULA 4

Pergunte diretamente à turma: como seria possível determinar o seno (ou o cosseno, ou a tangente) do ângulo de $200°$, já que esse ângulo claramente não "cabe" como ângulo do vértice de um triângulo? Escute se alguns estudantes têm alguma ideia, discuta, provoque. Depois, apresente as generalizações do seno, cosseno e tangente. Mostre aos estudantes uma das ideias mais belas e poderosas da Matemática: o ciclo trigonométrico.

Imagem 05 - O ciclo trigonométrico.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

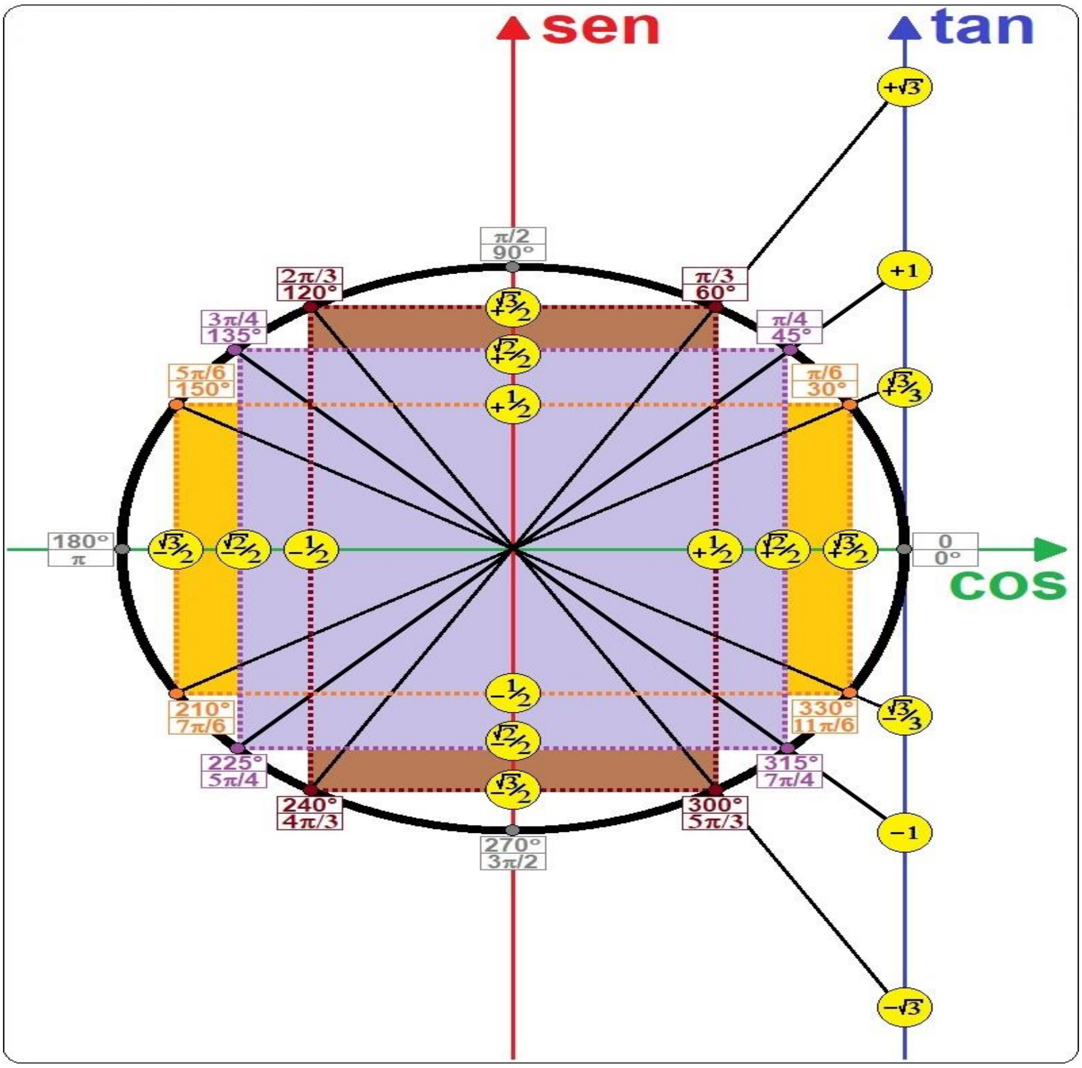
Após explicar cuidadosamente o ciclo trigonométrico, apresente a importantíssima relação trigonométrica fundamental: $\boldsymbol{sen}^2 x + \boldsymbol{cos}^2 x = 1$ (também presente na imagem acima). Neste ponto, peça que alguém escolha um ângulo aleatório (não notável) e peça que, usando uma calculadora científica – geralmente disponível como aplicativo de celular –, para esse ângulo verifiquem a relação (ou identidade) trigonométrica fundamental.

Finalizando esta parte, divida a turma em uma quantidade par de grupos. Para a metade deles, forneça o seno de um ângulo **agudo;** para a outra metade, o cosseno. Cada grupo deve fazer o seguinte:

A. Usando a relação trigonométrica fundamental: se fornecido o seno, encontrar o cosseno; se fornecido o cosseno, encontrar o seno.
B. Usando a relação $tan\, tan\, x\ = \frac{x}{coscos\, x}$: achar a tangente do ângulo.

Uma vez introduzido o ciclo trigonométrico, mostre aos estudantes como determinar mais facilmente o seno, cosseno, tangente etc. de um ângulo fazendo a **redução ao primeiro quadrante.** Nesta parte, é importante fazer diversos exemplos, para ter segurança de que a ideia e o procedimento foram bem absorvidos.

Imagem 06 - O ciclo trigonométrico, ângulos notáveis e redução ao primeiro quadrante.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

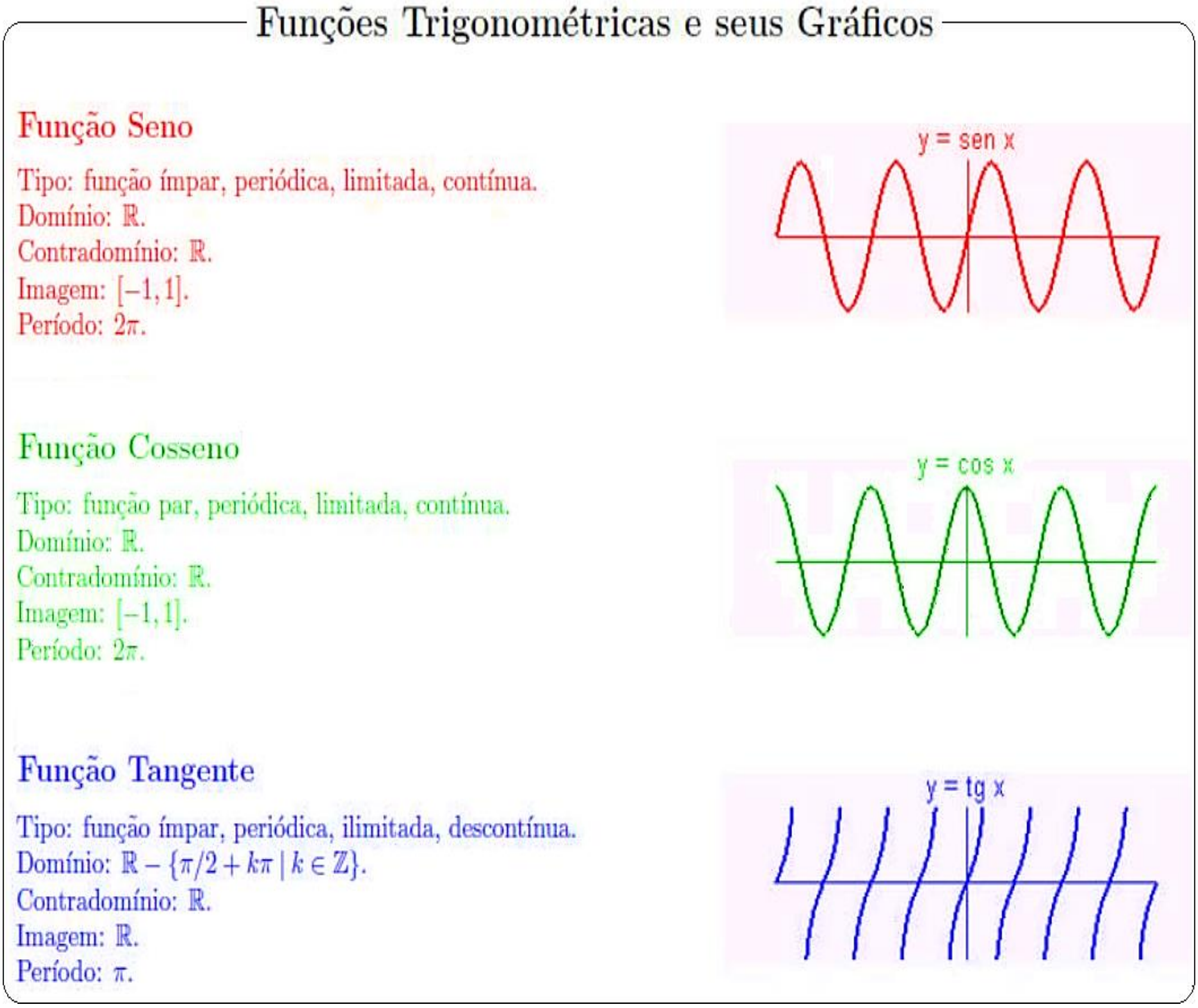
AULA 5

Finalmente, estamos prontos para a generalização final: as funções trigonométricas (também chamadas de funções circulares). Apresente-as no "ponto de equilíbrio": nem formalmente demais, nem formalmente de menos. Neste "fecho" da trigonometria, é importante mostrar aos estudantes como todas as peças se encaixam – de maneira organizada e coerente.

Nas funções trigonométricas, explique dois aspectos essenciais:

- Domínio, contradomínio e imagem.
- Gráficos.

Imagem 07 - Funções trigonométricas e seus gráficos.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

RECURSOS:

Quadro ou lousa, caderno, calculadora, atividades impressas.

Aplicativos para celular ou computador, tais como GeoGebra®, Wolfram Alpha® etc.

PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO:

Ao final desta parte, o estudante deverá ser capaz de realizar os tópicos a seguir:

- Conhecer as relações trigonométricas em triângulos retângulos.
- Ter noção de relações trigonométricas em triângulos quaisquer.
- Conhecer e saber trabalhar com seno, cosseno e tangente.
- Conhecer as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, incluindo respectivos domínios, contradomínios, imagens, propriedades e gráficos.
- Ter noção das identidades trigonométricas principais, especialmente a fundamental.

ATIVIDADES

1 – No Sistema Internacional de Unidades, qual a unidade padrão para medidas de **ângulos?**

2 – Mostre que o triângulo retângulo que possui lados proporcionais a 3, 4 e 5 **não** coincide com o triângulo retângulo que possui ângulos internos de 30°, 60° e 90°.

3 – Analise a figura abaixo e faça o que se pede.

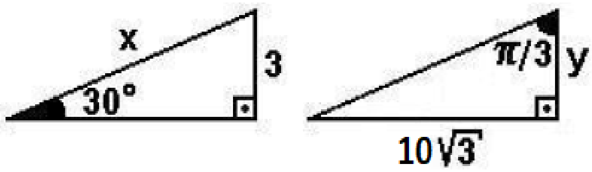


FIGURA FORA DE ESCALA

a) Determine os valores de x e y.
b) Os dois triângulos são semelhantes? Por quê?

4 – Determine o valor da expressão a seguir:

$$\cos 1^{\circ} \cdot \cos 2^{\circ} \cdot \cos 3^{\circ} \cdot \cos 4^{\circ} \cdot \cos 5^{\circ} \cdots \cos 100^{\circ}$$

5 – A figura a seguir ilustra um satélite artificial a uma altura h do planeta Terra, formando um "ângulo de depressão" α. Mostre que se h e α forem conhecidos então pode-se determinar o raio R da Terra (suposta aproximadamente esférica).

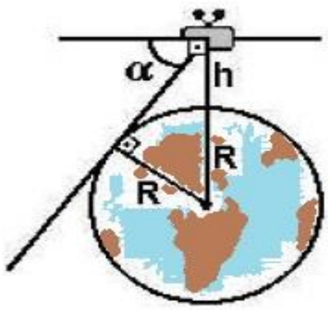


Figura meramente ilustrativa e fora de escala

REFERÊNCIAS

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB:** documento de referência do ano de 2001.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: educação infantil e ensino fundamental. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 05 fev. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino fundamental - anos finais. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 05 fev. 2023

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Classificação de triângulos. Classificação de triângulos. **Brasil escola,** [s. l.], 01 de junho de 2020. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/classificacao-de-triangulos.htm. Acesso em: 14 jul. 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Classificação de ângulo (nomenclatura),** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Classificação de triângulo (nomenclatura)**, Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Funções trigonométricas e seus gráficos,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **O ciclo trigonométrico, ângulos notáveis e redução ao primeiro quadrante,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **O ciclo trigonométrico,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Trigonometria no triângulo retângulo,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Unidades de medida de ângulo** Belo Horizonte, 2023.

TÓPICO:	DESCRITOR:
I. Espaço e Forma.	D6 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano. D7 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta. D8 - Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação. D9 - Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.
III. Números e Operações. Álgebra e Funções.	D31 - Determinar a solução de um sistema linear associando-o à uma matriz.

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: Estudo da reta.

DURAÇÃO: 4 aulas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A) CONTEXTUALIZAÇÃO/ABERTURA:

Na turma, provoque uma discussão com os elementos a seguir:

- O que é "localização"? Com que precisão? É interessante que sejam dados diversos exemplos, a fim de mostrar casos que utilizam menor ou maior precisão.
- Qual a diferença entre um ente geométrico e sua equação?
- Por que a Matemática tem diferentes formas de apresentar as mesmas coisas?

Em seguida, peça aos estudantes que apresentem diversas situações envolvendo retas. Obviamente, há muitas delas! Se possível, desenhe algumas na lousa, para motivação.

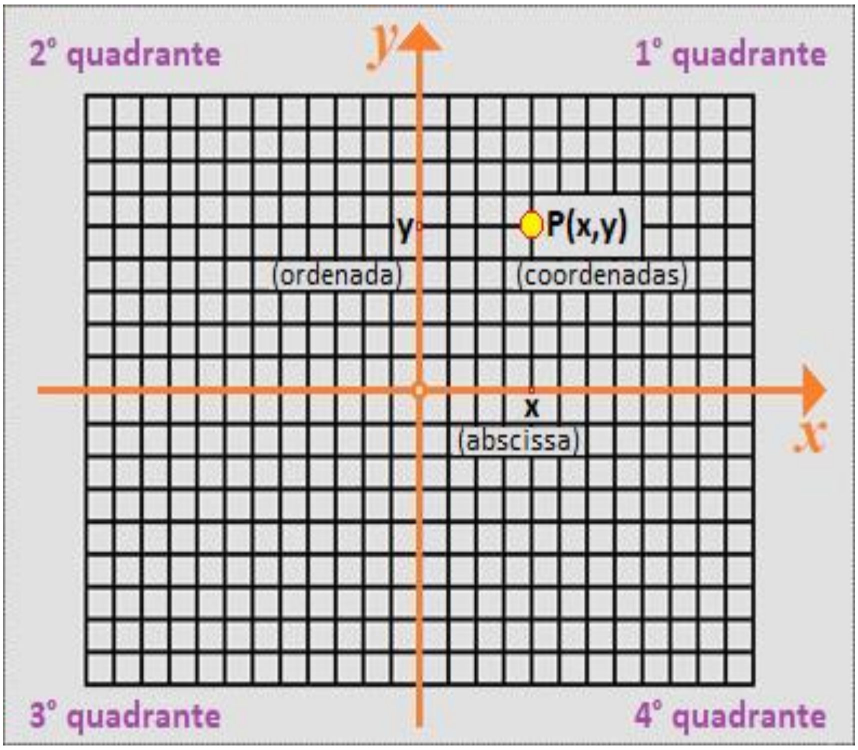
B) DESENVOLVIMENTO:

AULA 1

Apresente e defina o plano cartesiano, incluindo:

- Eixos coordenados.
- Coordenadas, quadrantes e sua nomenclatura.
- Localização de pontos.

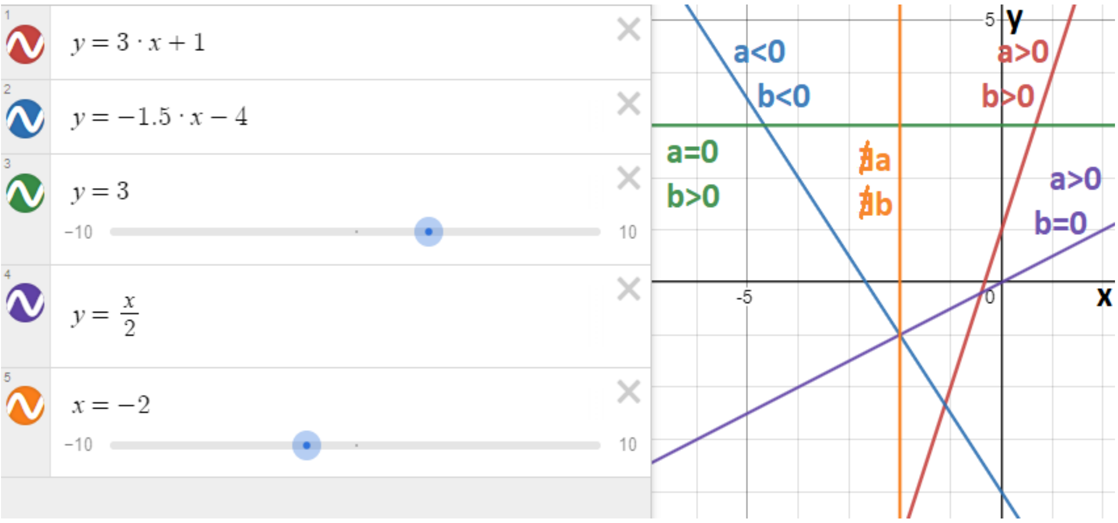
Imagem 1 - O plano cartesiano.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Apresente a **reta** e suas equações: a equação reduzida ($y = ax + b$) e a equação geral ($Ax + By + C = 0$). No caso da equação reduzida, apresente a nomenclatura e a interpretação geométrica dos coeficientes. Dê vários exemplos para facilitar a compreensão.

Imagem 2 – Equação $y = ax + b$: alguns exemplos da interpretação geométrica dos coeficientes a e b.

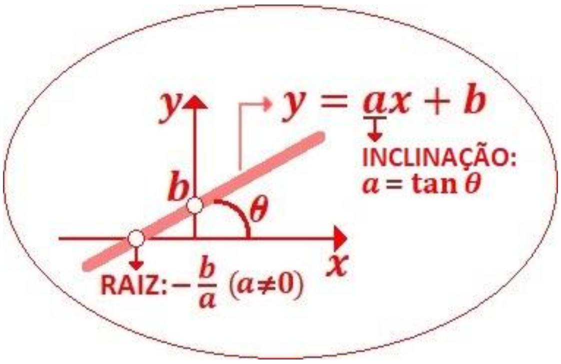


Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Explique que a inclinação da reta é a **tangente** do ângulo que a reta perfaz com o semieixo positivo das abscissas. Para terminar, apresente a importantíssima definição de **raiz** – em geral e no caso da reta. O conceito deve ser discutido sob dois pontos de vista:

- Algébrico: valor(es) de x que faz(em) com que $y = 0$.
- Geométrico: abscissa do ponto de interseção do gráfico com o eixo x. $y = ax + b$ $a = tan\, tan\, \theta$

Imagem 3 – Inclinação e raiz da reta.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

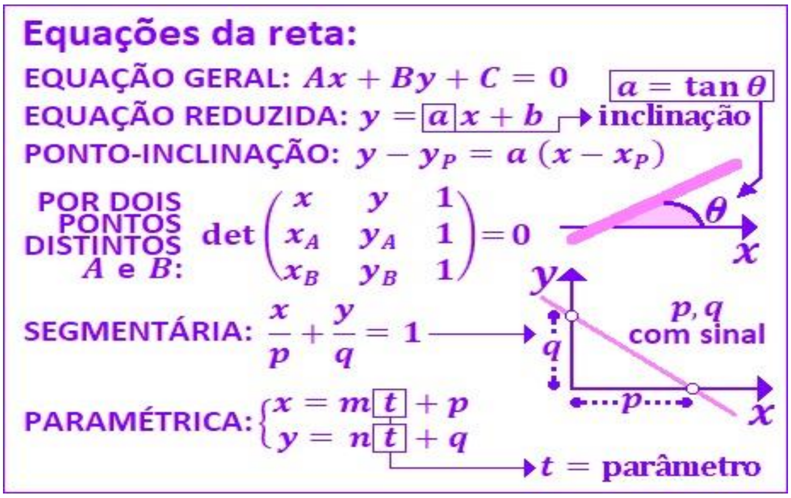
AULA 2

Na sequência, apresente as seguintes situações-problema:

- Como encontrar a equação da reta determinada por dois pontos distintos dados?
- Como encontrar a equação da reta dados um ponto da reta e a inclinação da reta?

Apresente um exemplo de cada e resolva juntamente com os estudantes. É importante aceitar "palpites" da turma durante as resoluções. A imagem a seguir apresenta a equação da reta em diversos formatos (alguns totalmente opcionais para este texto), inclusive nos formatos que solucionam as duas situações-problema acima:

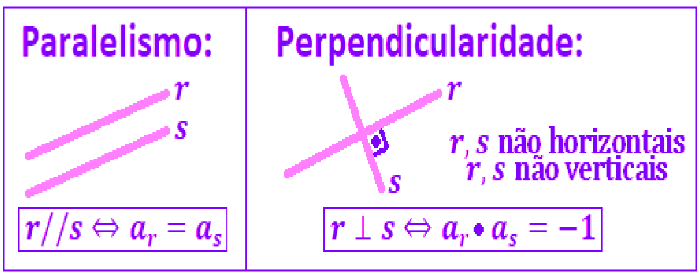
Imagem 4 – Diversos tipos de equações da reta.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

O material que se segue é opcional; pode ser interessante trabalhá-lo no sentido de facilitar a interpretação do que vem a seguir. Caso a decisão seja de apresentá-lo, não é necessário aprofundar muito – basta mostrar um exemplo de cada (paralelismo e perpendicularidade):

Imagem 5 – Paralelismo e perpendicularidade.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

AULA 3

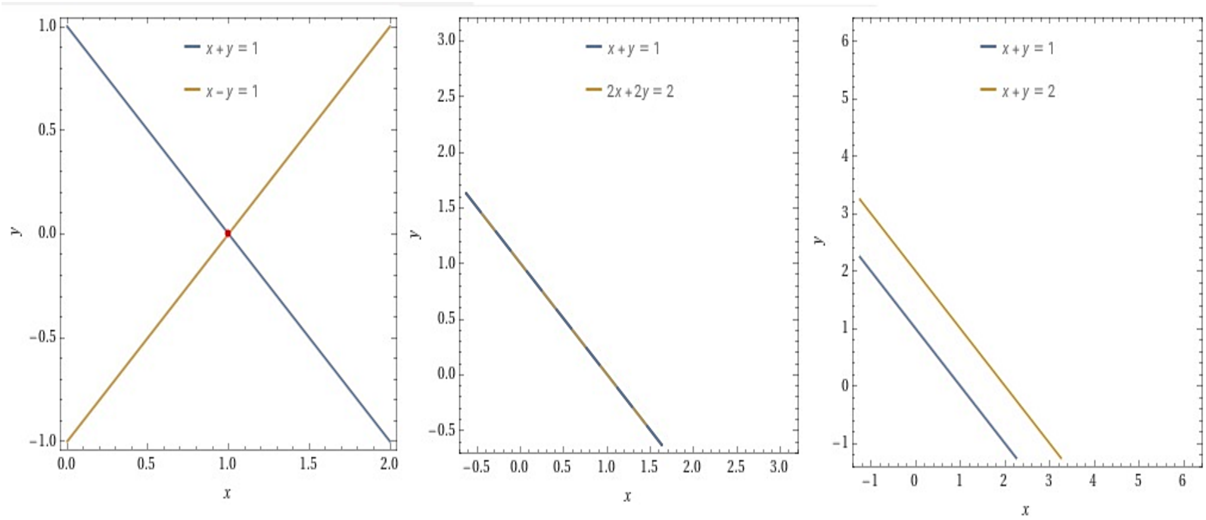
Nesta aula, introduza a questão de se determinar (algebricamente) a possível interseção entre duas retas no plano. Esse problema conduz imediatamente a um **<u>sistema linear</u>** com duas equações e duas incógnitas. Explore fortemente a conexão entre Álgebra e Geometria.

- Sistema possível e determinado (S.P.D.): $r \cap s = \{P\}$ (retas concorrentes).
- Sistema possível e indeterminado (S.P.I.): $r \cap s = r = s$ (retas paralelas coincidentes).
- Sistema impossível (S.I.): $r \cap s = \emptyset$ (retas paralelas distintas).

Faça um exemplo de cada caso. Aproveite para mostrar uma técnica diferente ao resolver cada um:

- Método da substituição.
- Método da comparação.

Imagem 6 – Estudo da interseção de duas retas no plano: três casos.

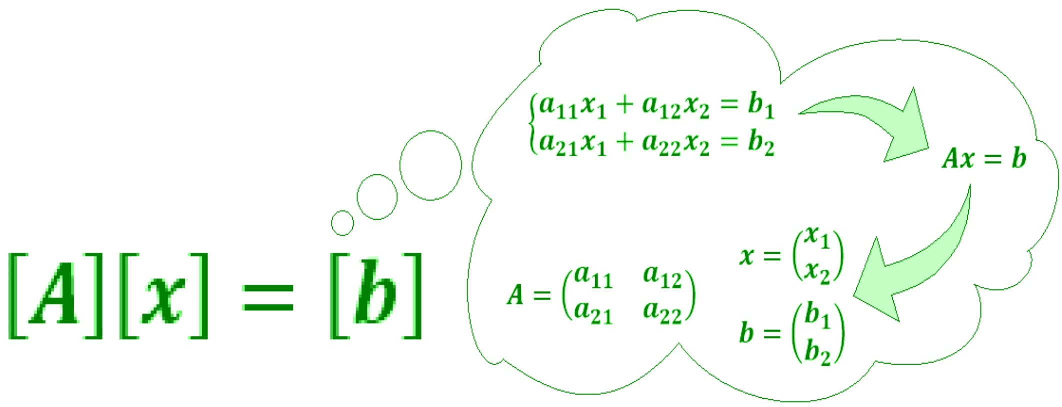


Fonte: (WASHINGTON, 2023)

AULA 4

Esta é a aula final desta parte. Introduza a representação matricial de um sistema linear:

Imagem 7 – Sistema linear 2x2 na forma matricial.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Argumente com a turma que a ideia essencial é que o sistema não é determinado pelas “letras”, mas sim pelos “números”.

Imagem 8 – Dois sistemas que na verdade são o mesmo.

$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 3b = 10 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Por fim, apresente o método do **escalonamento,** usando a representação matricial. Discuta com a turma as vantagens e desvantagens deste método. Depois, divida a turma em quatro grupos e forneça a cada um deles o **mesmo** sistema linear (2x2). Cada grupo deverá resolver por um método diferente: substituição – comparação – adição – escalonamento. Ao final, os grupos devem apresentar suas resoluções e lançar sua impressão sobre o respectivo método.

RECURSOS:

Quadro ou lousa, caderno, calculadora, atividades impressas.

Aplicativos para celular ou computador, tais como GeoGebra®, Wolfram Alpha® etc.

PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO:

Ao final desta parte, o estudante deverá ser capaz de realizar os tópicos a seguir:

- Ter noção de geometria analítica: quadrantes, coordenadas, pontos etc.
- Conhecer a reta e suas propriedades.
- Conhecer e saber trabalhar com equação da reta em mais de um formato.
- Saber encontrar a interseção de duas retas, através da resolução de sistema linear com duas equações e duas incógnitas.
- Saber interpretar geometricamente nos três casos (S.P.D., S.P.I. e S.I.).
- Saber resolver sistema linear com duas equações e duas incógnitas pelos métodos de substituição, comparação ou adição.
- Saber resolver sistema linear com duas equações e duas incógnitas usando matriz.

ATIVIDADES

1 – Em relação à reta de equação $4x - y = 12$, faça o que se pede.

a) Coloque a equação na forma geral.
b) Coloque a equação na forma reduzida.
c) Calcule a raiz.
d) Encontre o ponto da reta que possui as coordenadas iguais.
e) Esboce o gráfico da reta.

2 – Considere as informações a seguir.

– $r =$ reta que passa pelos pontos $A(1,4)$ e $B(3,10)$.
– $s =$ reta que passa pelo ponto $C(0,9)$ com inclinação igual a -1.
– $P =$ ponto de interseção das retas r e s.

Faça o que se pede:

a) Ache a equação reduzida da reta r.
b) Ache a equação reduzida da reta s.
c) Ache as coordenadas do ponto P.
d) Em um mesmo sistema de coordenadas, esboce as retas e destaque o ponto de interseção.

3 – No final de semana, Marina pretende visitar seus pais numa cidade vizinha àquela em que ela reside. Ela não pretende ir com o próprio carro e vai decidir entre duas opções:

– Táxi: bandeirada de R$4,00 mais 40 centavos por quilômetro.
– Motorista de aplicativo: 60 centavos por quilômetro.

Curiosamente, o valor final da corrida será o mesmo em ambos os casos. Então a que distância de sua residência os pais de Marina moram?

4 – Qual a diferença entre “reto” e “unidimensional”?

REFERÊNCIAS

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB:** documento de referência do ano de 2001.

DESMOS. **Gráficos Online.** [s. l.], 08 mai. 2018. Disponível em: https://www.desmos.com/calculator?lang=pt-BR. Acesso em: 19 jul. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: educação infantil e ensino fundamental. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 05 fev. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino fundamental - anos finais. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 05 fev. 2023

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Diversos tipos de equações da reta,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Dois sistemas que na verdade são o mesmo,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Equação y=ax+b: alguns exemplos da interpretação geométrica dos coeficientes a e b,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Estudo da interseção de duas retas no plano: três casos,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Inclinação e raiz da reta,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **O plano cartesiano,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Paralelismo e perpendicularidade,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Sistema linear 2x2 na forma matricial,** Belo Horizonte, 2023.

WOLFRAM, Stephen. **The Mathematica Book.** 5.ed. [s. l.], Wolfram Media, 2003.

TÓPICO:	DESCRITOR:
II. Grandezas e Medidas.	D11 - Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas. D12 - Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas. D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: Perímetro, área e volume.

DURAÇÃO: 4 aulas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A) CONTEXTUALIZAÇÃO/ABERTURA:

Como motivação, apresente a seguinte situação para a turma. (Deixe que os estudantes discutam e respondam livremente, porém faça mediações.) Uma fazendeira pretende reservar um terreno plano para pastagem. A terra já está livre de ervas daninhas. Como ela deve calcular os custos de:

- Cercar o terreno?
- Adubar o terreno?

Com isso, pretende-se chamar a atenção para a diferença entre o conceito de perímetro e o conceito de área.

Novamente contextualizando com o cotidiano, solicite aos estudantes que mencionem objetos que possuem aproximadamente os formatos a seguir (em cada item há possíveis respostas).

- Prisma (livro, gelatina, móvel, cubo mágico).
- Pirâmide (pirâmide do Egito, enfeite de mesa).
- Cilindro (copo, macarrão pene, bastonete da retina).
- Cone (cone de trânsito, funil, cone da retina).
- Esfera (bola de vôlei, bola de gude, partícula atômica, planeta [aproximadamente]).

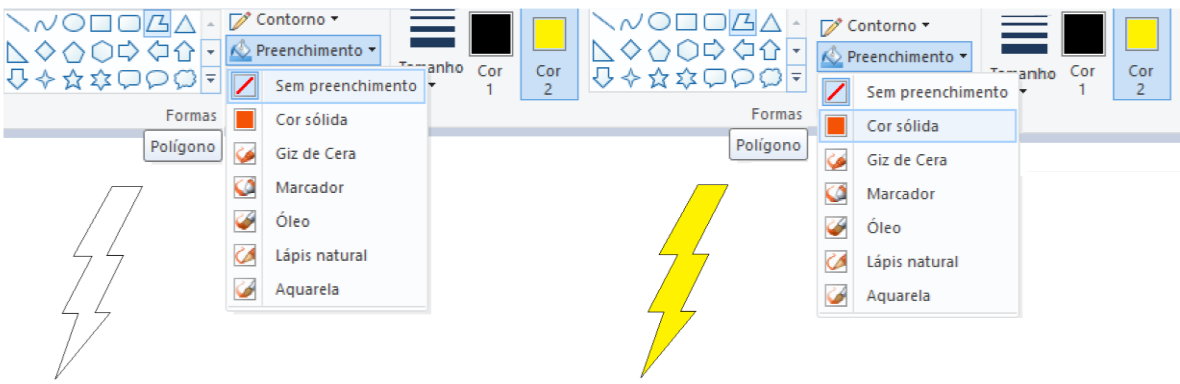
Para cada item citado pelos estudantes, discuta algo relacionado à área ou ao volume respectivo.

B) DESENVOLVIMENTO:

AULA 1

Para começar, convide os estudantes a utilizar um aplicativo para edição gráfica. Faça com que percebam a diferença entre uma forma feita "sem preenchimento" e uma forma feita "com preenchimento".

Imagem 1 - Em um aplicativo para desenho, exemplo de construção de uma forma sem e com preenchimento.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Para figuras planas, defina perímetro e área. Em seguida, apresente algumas e peça à turma outras situações do cotidiano envolvendo **perímetro**:

- Construir uma cerca ou um muro.
- Usar um aplicativo otimizador de percurso para percorrer uma rota.
- Comprar tecido, papel de parede, rodapé etc.
- Esticar um cabo de rede RJ45 para conectar um computador a um roteador.

Na sequência, apresente algumas e solicite aos estudantes outras situações do cotidiano envolvendo **área**:

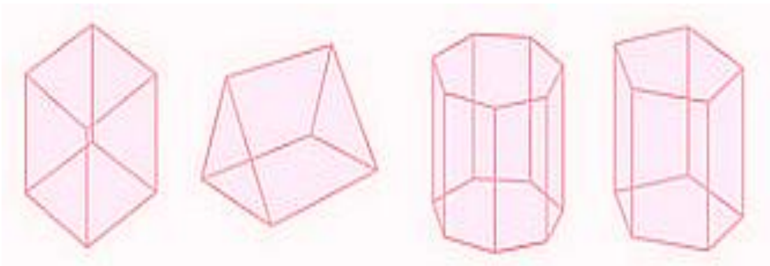
- Pintar um cômodo da casa.
- Trocar o piso da sala (de laminado para cerâmico, por exemplo).
- Verificar a cobertura de sinal de celular a fim de determinar pontos na cidade para instalação de antenas de retransmissão.
- Projetar a asa de um avião.

Apresente e resolva com a turma uma situação problema envolvendo perímetro e outra envolvendo área. Depois, divida a turma em grupos e sorteie situações problemas – algumas com perímetro e outras com área. Corrija no final (pelo menos uma de cada).

AULA 2

Nesta aula, aborde o primeiro sólido: o prisma.

Imagem 1 – Exemplos de prismas.



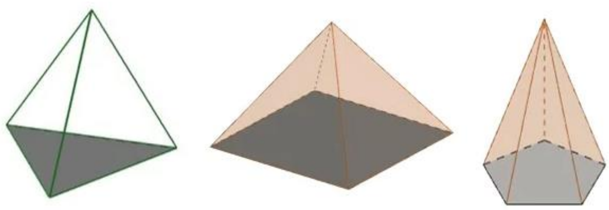
Fonte: (WASHINGTON, 2023)

O nível da abordagem vai depender do ritmo de aprendizado da turma, mas esta lista pode ajudar:

- Definição e nomenclatura: base, altura, arestas etc.
- Diferenciação entre prisma reto e prisma oblíquo.
- Planificação.
- Área da base, área lateral e área total.
- Volume.
- Caso particular: paralelepípedo – definição, propriedades, fórmulas etc.

Explique sobre o segundo sólido da lista: a pirâmide.

Imagem 2 – Exemplos de pirâmides.



Fonte: (TODA MATÉRIA, 2023.)

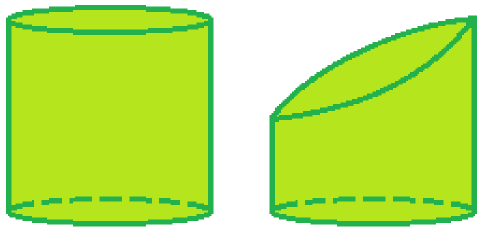
Sugestão de tópicos:

- Definição e nomenclatura: base, altura, arestas, apótema etc.
- Diferenciação entre pirâmide reta e pirâmide oblíqua.
- Planificação.
- Área da base, área lateral e área total.
- Volume; relação com o volume do prisma.
- Tronco de pirâmide – definição, propriedades, fórmulas etc.

AULA 3

Nesta aula, passe para a abordagem dos sólidos redondos. Explique o que é "redondo" neste contexto. Depois, explique sobre o cilindro.

Imagem 3 – Um cilindro reto e um oblíquo.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

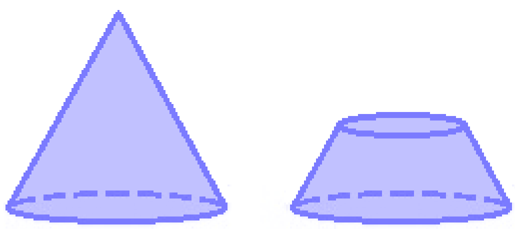
Sugestão de tópicos:

- Definição e nomenclatura: base, altura etc.
- Diferenciação entre cilindro reto e cilindro oblíquo.
- Planificação.
- Área da base, área lateral e área total.
- Volume.
- Caso particular: cilindro equilátero.

AULA 4

O próximo sólido redondo é o cone. Explique sobre ele.

Imagem 4 – Um cone reto e um tronco de cone reto.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Sugestão de tópicos:

- Definição e nomenclatura: base, altura etc.
- Diferenciação entre cone reto e cone oblíquo.
- Planificação.
- Área da base, área lateral e área total.
- Volume; relação com o volume do cilindro.
- Tronco de cone – definição, propriedades, fórmulas etc.

O último dos sólidos redondos comuns a ser abordado é a esfera. Comente com a turma que, por não ter "base" nem "ponta", esse sólido apresentará propriedades e fórmulas bem diferentes dos sólidos anteriores.

Imagem 5 – Uma bola de vôlei, uma bola de futebol e uma bola de basquete como exemplos aproximados de esferas.

Fonte: (VECTEEZY, 2022.)

Sugestão de tópicos:

- Diferença entre esfera e casca esférica.
- Elementos: raio, diâmetro, círculo máximo etc.
- Não existe planificação possível.
- Nomenclatura: partes da esfera; partes da casca esférica.
- Área total e volume.

RECURSOS:

Quadro ou lousa, caderno, calculadora, atividades impressas.

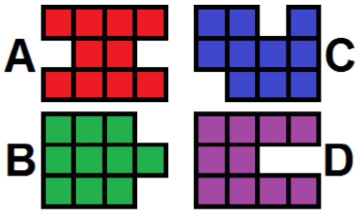
Aplicativos para celular ou computador, tais como GeoGebra®, Wolfram Alpha® etc.

PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO:

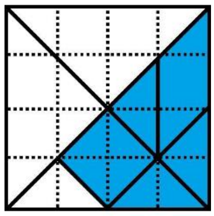
Ao final desta parte, o estudante deverá ser capaz de realizar os tópicos a seguir:

- Reconhecer os principais sólidos (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
- Resolver situação problema envolvendo área total de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
- Resolver situação problema envolvendo volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
- Resolver situação problema envolvendo perímetro de figuras planas.
- Resolver situação problema envolvendo área de figuras planas.

1 – Dentre as figuras a seguir, qual é o par que possui o mesmo perímetro externo e a mesma área total?



2 – Em um laboratório de Matemática, existem diversos recursos didáticos e materiais lúdicos. Entre eles, o **tangram** – um jogo de origem chinesa, criado há mais de 1000 anos. Além do quadrado, com ele podem ser formadas figuras humanas, construções, animais e barcos, além de diversos outros objetos e figuras geométricas.



Determine a fração que a parte colorida representa em relação à figura completa.

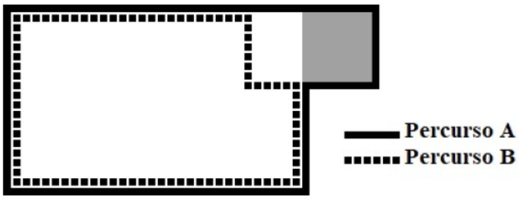
a) 7/16
b) 1/2
c) 9/16
d) 5/8
e) 11/16

3 – Em uma empresa, existe um estoque de material de alvenaria suficiente para construir 50 metros de parede. Deseja-se cercar a região ilustrada a seguir com paredes, a fim de construir um depósito de refugos de informática para conserto futuro (gabinetes velhos, monitores estragados, teclados sem condições de uso, impressoras sucateadas etc.). Na figura, todos os ângulos são de noventa graus e todas as medidas estão em metros.

O material de construção estocado não será suficiente. Para completar todo o perímetro indicado, a quantidade de material a ser adquirido corresponde a quantos metros adicionais?

a) 16 m.
b) 17 m.
c) 18 m.
d) 19 m.
e) 20 m.

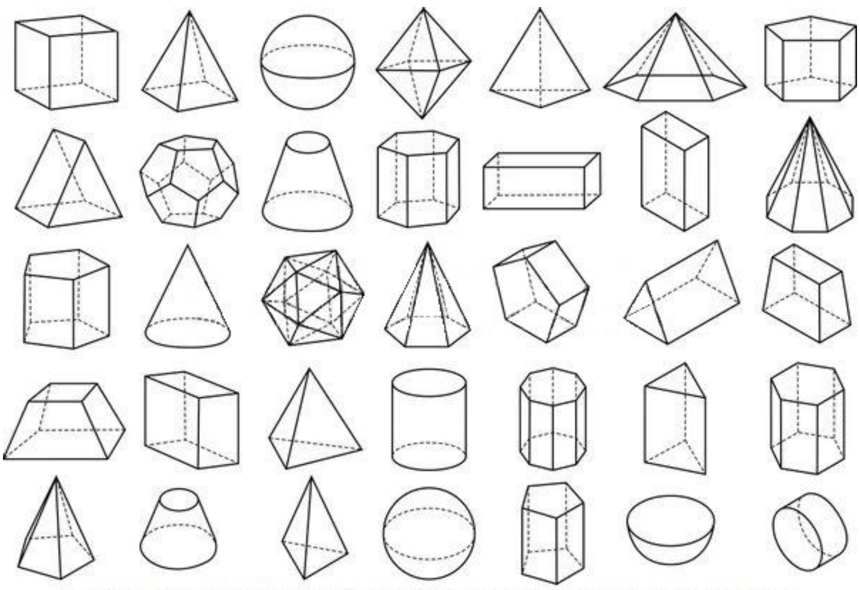
4 – Na figura a seguir, considera-se que todas as "espessuras" são desprezíveis. Além disso, todas as "quinas" correspondem a ângulos retos. O Percurso A e o percurso B na verdade têm superpostos os trechos mostrados como lado a lado (para melhor visualização).



Suponhamos que a região sombreada se constitua em um quadrado de 1 m de lado. A diferença entre o perímetro do Percurso A e o perímetro do Percurso B é

a) menor do que 1 metro.
b) 1 metro.
c) entre 1 e 2 metros.
d) 2 metros.
e) maior do que 2 metros.

5 – Classifique cada um dos sólidos abaixo como: prisma, pirâmide, cilindro (ou parte), cone (ou parte), esfera (ou parte) ou nenhum deles:

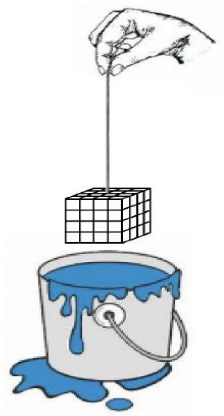


Fonte: https://www.shutterstock.com/pt/image-vector/basic-stereometry-shapes-line-set-cuboid-1679166544

6 – Por que se fala em tronco de pirâmide ou em tronco de cone, mas não se fala em tronco de prisma ou em tronco de cilindro?

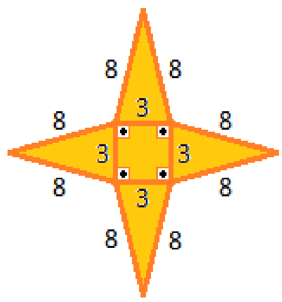
7 – Pesquise sobre a Pirâmide de Gizé, no Egito (patrimônio mundial da UNESCO). Explique sobre seu formato, altura, área, volume e outros atributos relacionados à Matemática.

8 – Alice pegou 64 cubos brancos pequenos idênticos e os colou juntos, formando um cubo grande, conforme ilustrado na figura abaixo. Depois, usando um fio, Alice mergulhou o cubo grande em um balde com tinta azul, retirando-o em seguida. Ela esperou a tinta secar e depois desmontou cuidadosamente o cubo grande de novo nos 64 cubos pequenos. Assinale a alternativa correta.



a) Exatamente 10 cubos pequenos continuam inteiramente brancos.
b) Exatamente 20 cubos pequenos têm exatamente 1 face pintada de azul.
c) Exatamente 20 cubos pequenos têm exatamente 2 faces pintadas de azul.
d) Exatamente 10 cubos pequenos têm exatamente 3 faces pintadas de azul.
e) Nenhum cubo pequeno tem exatamente 4 faces pintadas de azul.

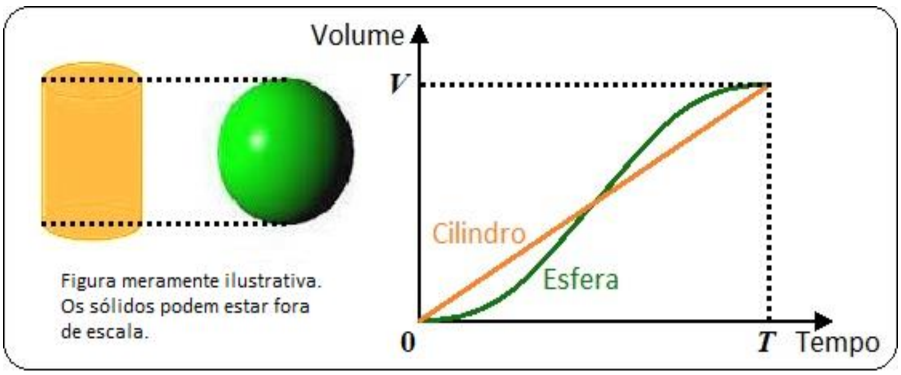
9 – A imagem ao lado representa a planificação de uma pirâmide reta triangular de base quadrada.



a) Calcule sua área da base.
b) Calcule sua área lateral.
c) Calcule sua área total.
d) Calcule seu volume.

10 – Em um laboratório, existem dois reservatórios de água de mesma altura total $(2R)$ e de mesmo volume (V). O primeiro tem formato de um cilindro e o segundo tem formato esférico. Inicialmente, ambas as caixas d'água se encontram vazias. Responda ao que se pede.

a) Determine a medida do raio do cilindro em função da medida do raio da esfera.
b) Uma bomba de **vazão constante** é usada para encher ambas as caixas d'água (uma de cada vez). Um tempo total (T) é gasto para encher cada uma delas. Os gráficos abaixo mostram a variação do volume em função do tempo para cada reservatório. Explique **qualitativamente** o motivo da diferença no formato dos dois gráficos.



c) Agora, explique **quantitativamente** a diferença no formato dos dois gráficos. Mostre que o gráfico relativo ao reservatório cilíndrico é uma função polinomial do primeiro grau. Mostre que o gráfico relativo ao reservatório esférico é uma função polinomial do terceiro grau.

REFERÊNCIAS

ASTH, Rafael C., Pirâmide. **TODA MATÉRIA.** [S. L.], [2023]**.** Disponível em: https://www.todamateria.com.br/piramide/. Acesso em: 28 jul. 2023.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB:** documento de referência do ano de 2001.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: educação infantil e ensino fundamental. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 05 fev. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino fundamental - anos finais. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 05 fev. 2023

SHUTTERSTOCK. **Basic stereometry shapes line set cuboid.** [Conjunto de linhas de formas de estereometria básica cuboide.]. [s. l.], [2023]. Disponível em: https://www.shutterstock.com/pt/image-vector/basic-stereometry-shapes-line-set-cuboid-1679166544. Acesso em: 26 jul. 2023.

VECTEEZY. **Esporte popular – jogo de bola – design de ícone – elemento adequado para sites – impressão, design ou aplicativo.** Disponível em: https://pt.vecteezy.com/arte-vetorial/10131825-popular-esporte-jogo-bola-icone-design-elemento-adequado-para-sites-impressao-design-ou-aplicativo. Acesso em: 28 jul. 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Em um aplicativo para desenho, exemplo de construção de uma forma sem e com preenchimento,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Exemplos de prismas,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Um cilindro reto e um oblíquo,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Um cone reto e um tronco de cone reto,** Belo Horizonte, 2023.

TÓPICO:	DESCRITOR:
III. Números e Operações. Álgebra e Funções	D14 - Identificar a localização de números reais na reta numérica. D15 - Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: A reta numérica, grandezas proporcionais e porcentagens.

DURAÇÃO: 2 aulas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A) CONTEXTUALIZAÇÃO/ABERTURA:

Este planejamento possuiu 2 aulas. Para a primeira aula, em conjunto com a turma, anote na lousa mais ou menos cinco números fracionários. Em seguida, escreva os números em ordem crescente. Mostre como isso só é possível porque existe um conceito de **ordenação.** Comente que isso será visto tanto do ponto de vista algébrico como geométrico. (Não entre em detalhes ainda.)

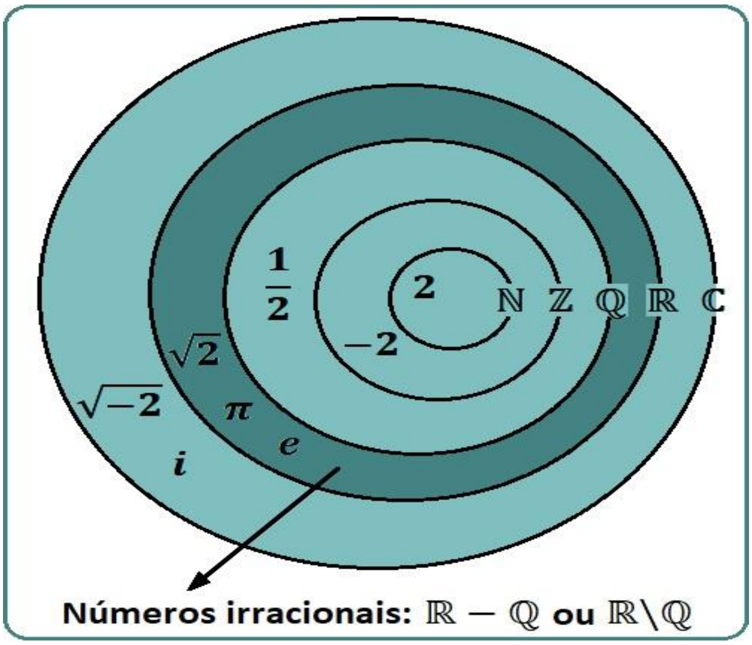
Para aula seguinte, leve em consideração que já foi visto o conceito de proporcionalidade (geometricamente). Desta vez, será de um ponto de vista algébrico. Utilize uma motivação simples e útil: aplicação à Matemática financeira. Se uma dúzia de ovos custa R$8,00, então quanto custam duas dúzias? E três dúzias? Esse exemplo é bem intuitivo. Comente que também será vista a definição e exemplos de porcentagens. (Não entre em detalhes ainda.)

B) DESENVOLVIMENTO:

AULA 1

Inicie fazendo uma revisão dos conjuntos numéricos. Peça a um estudante diferente por vez para dar um exemplo de: um número natural; um número inteiro não natural; um número racional não inteiro; um número real irracional. Provoque a turma com a pergunta: existem números "para além" dos números reais? Quanto a isso não é necessário entrar em detalhes, apenas comente brevemente (se achar conveniente).

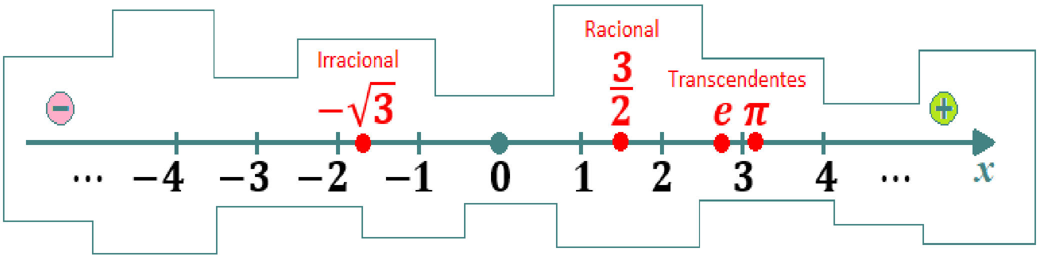
Imagem 1 – Alguns conjuntos numéricos.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Na sequência, apresente a **reta real** com todas as suas consequências. Até certo ponto (das aplicações), os números reais são referidos como sendo "todos" os números, no sentido de que o conjunto R contém os naturais, os inteiros, os racionais e os irracionais.

Imagem 2 – A reta real com alguns números representados.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

É importante comentar que nesse conjunto temos a noção de **<u>ordem</u>,** ou seja, dados dois números reais x e y, exatamente uma destas três possibilidades mutuamente excludentes tem que acontecer: ou $x < y$, ou $x = y$, ou $x > y$. Por fim, defina número **<u>positivo</u>** e número **<u>negativo</u>.**

AULA 2

O tema geral desta aula é grandezas direta ou inversamente proporcionais. Antes de entrar no tema, apresente o conceito de grandezas. Dê alguns exemplos e depois peça aos estudantes para citarem os deles. Volte a seus exemplos e indique as unidades de cada grandeza (segundo o Sistema Internacional de Unidades). Peça aos estudantes para tentarem fazer o mesmo para as grandezas escolhidas por eles.

Em seguida, siga esta sequência:

- Defina razão e proporção, diferenciando-as.
- Defina grandezas diretamente proporcionais e a notação.
- Dê vários exemplos de grandezas diretamente proporcionais.
- Defina grandezas inversamente proporcionais e a notação.
- Dê vários exemplos de grandezas inversamente proporcionais.
- Resolva situações-problema envolvendo regra de três simples.
- Resolva situações-problema envolvendo regra de três composta.

RECURSOS:

Quadro ou lousa, caderno, calculadora, atividades impressas.

Aplicativos para celular ou computador, tais como GeoGebra®, Wolfram Alpha® etc.

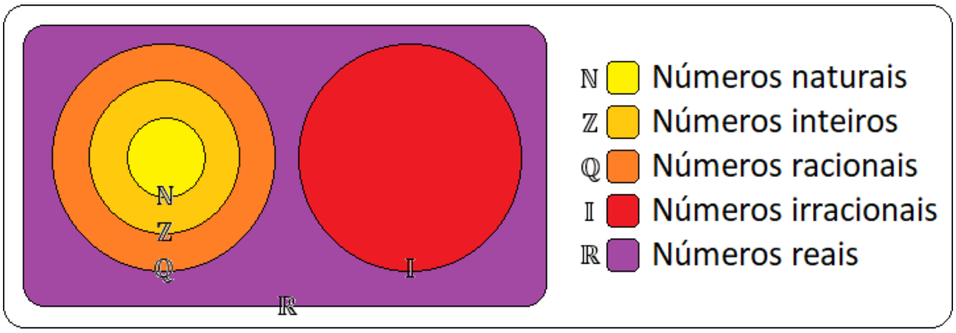
PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO:

Ao final desta parte, o estudante deverá ser capaz de realizar os tópicos a seguir:

- Reconhecer os conjuntos numéricos básicos (naturais, inteiros, racionais, reais).
- Identificar a localização de números reais na reta numérica.
- Saber comparar números reais em diversos formatos.
- Resolver situação problema envolvendo variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.
- Saber trabalhar com regra de três simples (com G.D.P. ou G.I.P.).
- Saber trabalhar com regra de três composta (com G.D.P. ou G.I.P.).
- Conhecer e saber trabalhar com porcentagem.
- Trabalhar com situações problema comuns envolvendo porcentagem.

ATIVIDADES

1 – Onde estão os erros na representação de conjuntos numéricos a seguir? Dica: existe um erro no desenho em si e existem diversos erros na legenda.



2 – Desenhe a reta real e localize nela os seguintes números:

$-3,8$	-2	$-\frac{1000}{999}$	$-\sqrt{2}$	-0
$\frac{50}{49}$	$1,5$	$\sqrt{7}$	π^2	10

3 – Utilizando tecnologia (calculadora, celular ou computador), perfaça o **algoritmo** a seguir. **Atenção:** utilize quatro casas decimais com arredondamento. Depois, responda o que se pede.

A	**7**	**Passo 0: Faça $A = 7$.**
B	**3,5000**	**Passo 1: Faça $B = \frac{A}{2}$.**
C	**2,7500**	**Passo 2: Calcule $C = \frac{1}{2}\left(B + \frac{A}{B}\right)$.**
D	**2,6477**	**Passo 3: Calcule $D = \frac{1}{2}\left(C + \frac{A}{C}\right)$.**
E	**2,6458**	**Passo 4: Calcule $E = \frac{1}{2}\left(D + \frac{A}{D}\right)$.**
F	**2,6458**	**Passo 5: Calcule $F = \frac{1}{2}\left(E + \frac{A}{E}\right)$.**

a) Por que não é necessário prosseguir além do Passo 5?
b) O que esse algoritmo calcula nesse caso?
c) O que esse algoritmo calcula no caso geral $A \geq 0$?
d) Verifique sua resposta anterior trocando $A = 7$ por $A = 9$.

4 – (USP). Considere os números reais racionais:

$$a = \frac{105678 + 10^{999}}{105679 + 10^{999}} \quad \text{e} \quad b = \frac{105679 + 10^{999}}{105680 + 10^{999}}.$$

Assinale a correta:

a) $ab > a$.
b) a e b são tão próximos de 1 que só usando um computador podemos decidir se são distintos.
c) $a = b(b - 1)$.
d) $b < a$.
e) $a < b$.

5 – Considerando a reta real, faça o que se pede.

a) Mostre intuitivamente que entre quaisquer dois números irracionais distintos existe um racional.
b) Mostre intuitivamente que entre quaisquer dois números racionais distintos existe um irracional.

6 – Responda o que se pede. Se achar necessário, use uma calculadora científica.

a) O seno de um ângulo é (diretamente) proporcional ao ângulo?
b) A resposta anterior depende da unidade (grau, grado ou radiano)?

7 – Em termos de grandezas inversamente proporcionais, explique por que (e **como**) uma bolha de gás aumenta de tamanho quando vai do fundo para a borda do refrigerante em um copo.

8 – Uma fazendeira comprou 15 toneladas de ração para alimentar 50 vacas durante 20 dias. Entretanto, passada a metade desse período, ela adquiriu mais 5 vacas. Daqui a quantos dias ela terá que comprar mais ração?

REFERÊNCIAS

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB:** documento de referência do ano de 2001.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: educação infantil e ensino fundamental. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 05 fev. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino fundamental - anos finais. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 05 fev. 2023

WASHINGTON, Alexandre Duarte. REIS, Thiago Linhares Brant. **Cálculo de raiz enésima usando operações elementares.** Educação Contemporânea, Editora Poisson, Belo Horizonte, Volume 31, Páginas 166–172, setembro de 2021.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Alguns conjuntos numéricos,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **A reta real com alguns números representados,** Belo Horizonte, 2023.

TÓPICO:	DESCRITOR:
III. Números e Operações. Álgebra e Funções	D22 - Resolver problema envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral.

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: Progressão aritmética e progressão geométrica.

DURAÇÃO: 2 aulas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A) CONTEXTUALIZAÇÃO/ABERTURA:

Pergunte à turma: "Quem já recebeu algum desafio do tipo 'Qual o próximo número (ou figura)? Provavelmente alguns estudantes se manifestarão e até mesmo vão querer dar exemplos. Introduza a ideia de sequência. Explique que a ideia deste módulo é estudar alguns tipos específicos de sequências.

B) DESENVOLVIMENTO:

AULA 1

Inicie com a definição de sequência, mas sem ser excessivamente formal. Exemplifique, inclusive com exemplos nos quais $a_n = f(n)$ (cada termo é uma função da posição). Chame a atenção para o fato de que, em alguns casos, é conveniente que uma sequência, em vez de começar pelo termo a_1, comece pelo termo a_0. Exemplifique isto também (se ainda não o fez).

Em seguida, apresente a **progressão aritmética** através de um exemplo. Usando o exemplo como base, introduza estes elementos:

- Primeiro termo e razão.
- Primeira fórmula do termo geral.
- Segunda fórmula do termo geral.
- Fórmula da soma dos primeiros n termos.

Imagem 1 – Fórmulas da progressão aritmética.

1ª fórmula do termo geral	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
2ª fórmula do termo geral	$a_n = a_m + (n-m) \cdot r$
Soma dos n primeiros termos	$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Fonte: (WASHINGTON, 2023)

AULA 2

Na sequência, apresente a **progressão geométrica** através de um exemplo. Usando o exemplo como base, introduza estes elementos:

- Primeiro termo e razão.
- Primeira fórmula do termo geral.
- Segunda fórmula do termo geral.
- Fórmula da soma dos primeiros n termos.
- Fórmula da soma dos infinitos termos (explicando quando pode ser aplicada).

Imagem 2 – Fórmulas da progressão geométrica.

1ª fórmula do termo geral	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
2ª fórmula do termo geral	$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$
Soma dos n primeiros termos	$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$
Soma dos infinitos termos (P.G. com $\|q\| < 1$)	$S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$

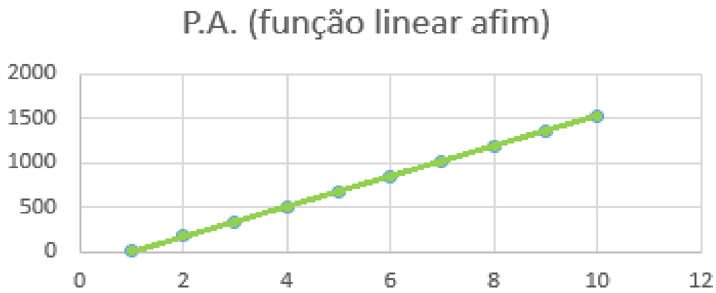
Fonte: (WASHINGTON, 2023)

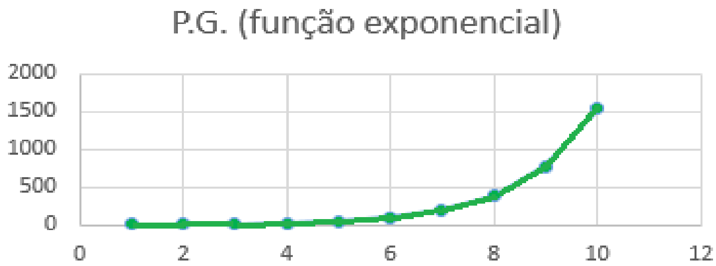
Para terminar, compare as duas progressões, explicando que:

- A progressão aritmética possui crescimento **linear.**
- A progressão geométrica possui crescimento **exponencial.**

Imagem 3 – Progressão aritmética *versus* progressão geométrica.

n	P.A.	P.G.
1	3	3
2	173	6
3	343	12
4	513	24
5	683	48
6	853	96
7	1023	192
8	1193	384
9	1363	768
10	1533	1536





Fonte: (WASHINGTON, 2023)

RECURSOS:

Quadro ou lousa, caderno, calculadora, atividades impressas.

Aplicativos para celular ou computador, tais como GeoGebra®, Wolfram Alpha® etc.

PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO:

Ao final desta parte, o estudante deverá ser capaz de realizar os tópicos a seguir:

- Conhecer a definição de sequência (ou sucessão ou progressão).
- Trabalhar com progressão aritmética (incluindo fórmulas diversas).
- Trabalhar com progressão geométrica (incluindo fórmulas diversas).
- Resolver situações problema envolvendo P.A. ou P.G.

ATIVIDADES

1 – Em uma determinada sequência, o valor 2,5 é sucedido pelo valor 5,5. Com base nessa informação, faça o que se pede.

a) Se for uma progressão aritmética, então qual o próximo valor?
b) Se for uma progressão geométrica, então qual o próximo valor?

2 – Talvez a sequência mais famosa da matemática seja a **sequência de Fibonacci.** Essa sequência é uma sequência **infinita** definida da seguinte maneira:

- Os valores iniciais são 0 e 1 (nessa ordem).
- Cada valor subsequente é a soma dos dois anteriores.

Eis alguns valores:

Imagem 4 - Sequência de Fibonacci.

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	...

Fonte: (WASHINGTON, 2023)

a) Mostre que essa sequência **não é** uma progressão aritmética.
b) Mostre que essa sequência **não é** uma progressão geométrica.

3 – Analise a tabela abaixo contendo uma progressão aritmética (a_n) e uma progressão geométrica (b_n) infinitas. Depois, faça o que se pede.

	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P.A.	a_n	314	1180130	2359946	3539762	4719578	5899394	7079210	8259026	9438842	10618658	11798474	...
P.G.	b_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...

a) Qual o primeiro termo da progressão aritmética?
b) Qual a razão da progressão aritmética?
c) Qual o primeiro termo da progressão geométrica?
d) Qual a razão da progressão geométrica?
e) Qual o menor valor de n para o qual se tem $a_n \leq b_n$?
f) Existe n para o qual se tem $a_n = b_n$?

4 – Uma progressão geométrica infinita (a_n) possui razão $q = -\frac{1}{3}$ e sabe-se que $a_{99}a_{100} \geq 0$. Então pode-se afirmar que:

a) $a_{101} < a_{102}$.
b) $a_{103} \geq a_{104}$.
c) $a_{105} < 0$.
d) $a_{106} > 0$.
e) $a_{107}a_{108} > a_{109}$.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB:** documento de referência do ano de 2001.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: educação infantil e ensino fundamental. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 05 fev. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino fundamental - anos finais. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 05 fev. 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Fórmulas da progressão aritmética,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Fórmulas da progressão geométrica,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Progressão aritmética versus progressão geométrica,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Sequência de Fibonacci,** Belo Horizonte, 2023.

TÓPICO:	DESCRITOR:
III. Números e Operações. Álgebra e Funções.	D18 - Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela. D19 - Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau. D20 - Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos. D21 - Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto. D23 - Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes. D24 - Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico.

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: Função polinomial do primeiro grau.

DURAÇÃO: 1 aula.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A) CONTEXTUALIZAÇÃO/ABERTURA:

Discuta vários movimentos que são em linha reta, como:

- Um carro em um trecho reto de uma estrada.
- Um trem em um trecho reto de uma ferrovia.
- Um avião decolando ou pousando.

Peça aos estudantes que forneçam mais exemplos de trajetórias retilíneas. Explique que a **reta** é o objeto de estudo deste módulo. (Não entre em detalhes ainda.)

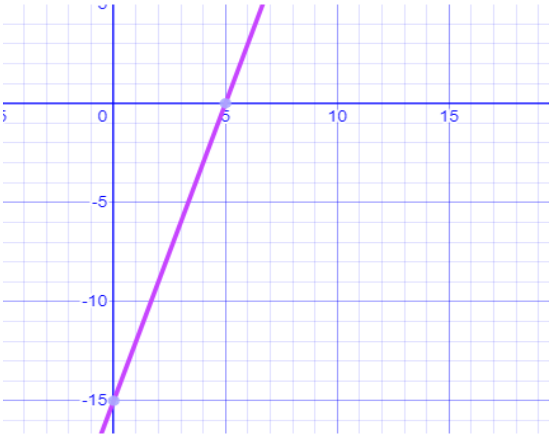
B) DESENVOLVIMENTO:

Sequência sugerida:

- Defina (sem muito formalismo) função polinomial.
- Defina grau.
- Defina função polinomial do primeiro grau:
    - Função linear afim: $y = ax + b$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.
    - Função linear: $y = ax$ com $a \neq 0$.
    - Função constante: $y = b$.
- Desenhe o formato geral dos gráficos desses três subcasos.
- Defina: $a =$ inclinação ou coeficiente angular.
- Defina: $b =$ intercepto y ou coeficiente linear.

Em seguida, mostre à turma o gráfico a seguir.

Imagem 1 – Gráfico de uma reta.



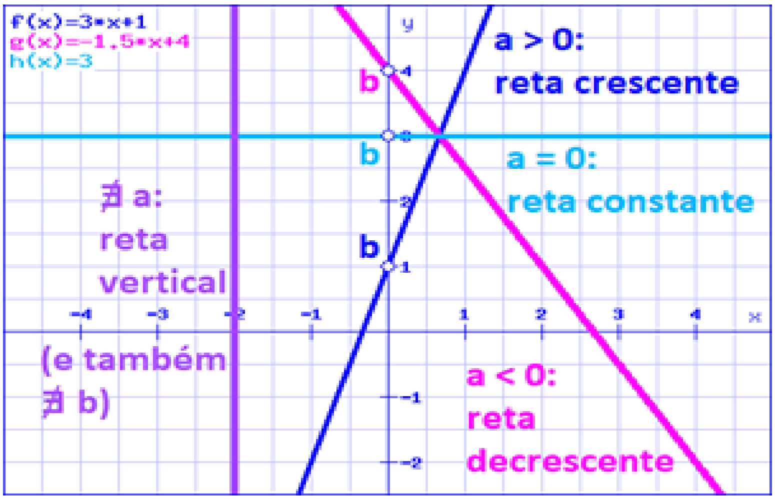
Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Discuta com os estudantes:

- Qual é a função polinomial?
- Quais os valores de a e b?

Em seguida, apresente e discuta os significados **geométricos** de a e b:

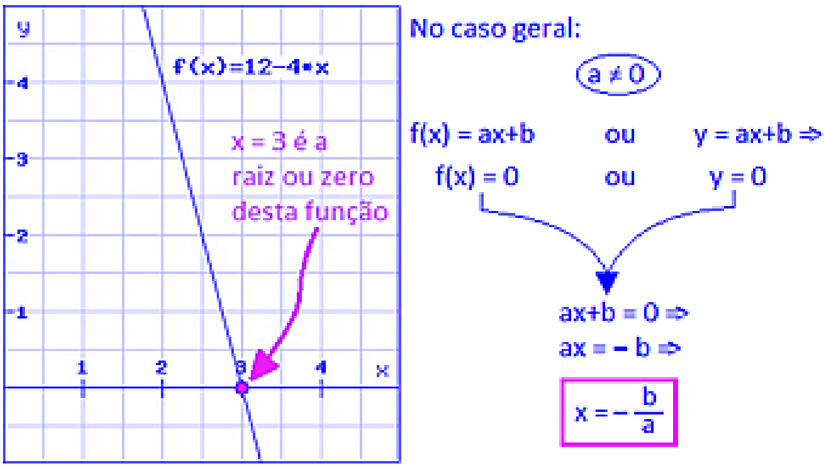
Imagem 2 – Significados geométricos de a e b.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Finalmente, apresente e discuta a definição de **raiz** ou **zero** de uma função, particularizado para a reta $y = ax + b$. Por exemplo:

Imagem 3 – Raiz ou zero da função $f(x) = ax + b$.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Explique o seguinte:

- **Algebricamente:** raiz ou zero é qualquer valor de x que torna $y = f(x)$ igual a zero.
- **Geometricamente:** raiz ou zero é o valor de x de qualquer ponto (x, y) no qual o gráfico intercepta o eixo das abscissas.

RECURSOS:

Quadro ou lousa, caderno, calculadora, atividades impressas.

Aplicativos para celular ou computador, tais como GeoGebra®, Wolfram Alpha® etc.

PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO:

Ao final desta parte, o estudante deverá ser capaz de realizar os tópicos a seguir:

- Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
- Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.
- Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
- Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
- Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes.
- Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico.

ATIVIDADES

1 – Em relação à função $f(x) = -4x + 10$, faça o que se pede.

a) Determine a inclinação.
b) Determine o intercepto y.
c) Determine a raiz ou zero da função.
d) Determine o valor de y correspondente a $x = 10{,}5$.
e) Determine o valor de x correspondente a $y = 10{,}5$.
f) Esboce o gráfico da função.

2 – Em relação à função $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, faça o que se pede.

a) Quais as coordenadas do ponto P dessa reta que possui as duas coordenadas iguais?
b) Esboce o gráfico da função, destacando o ponto P.

3 – Dê um exemplo de um gráfico que seja uma reta, mas não seja uma função polinomial de primeiro grau. Qual a equação dessa reta?

REFERÊNCIAS

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB:** documento de referência do ano de 2001.

DESMOS. **Gráficos Online.** [s. l.], 08 mai. 2018. Disponível em: https://www.desmos.com/calculator?lang=pt-BR. Acesso em: 03 ago. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: educação infantil e ensino fundamental. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 05 fev. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino fundamental - anos finais. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 05 fev. 2023

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Gráfico de uma reta,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Raiz ou zero da função f(x)=ax+b,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Significados geométricos de a e b,** Belo Horizonte, 2023.

TÓPICO:	DESCRITOR:
III. Números e Operações. Álgebra e Funções.	D17 - Resolver problema envolvendo equação do 2º grau. D18 - Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela. D20 - Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos. D21 - Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto. D25 - Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau. D26 - Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: Função polinomial do segundo grau.

DURAÇÃO: 2 aulas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A) CONTEXTUALIZAÇÃO/ABERTURA:

Discuta vários movimentos que **não** são em linha reta, como:

- Uma bola de futebol lançada a partir de uma cobrança de falta.
- O esguicho de água que sai de um bebedouro.
- A trajetória de uma folha de árvore ao vento.

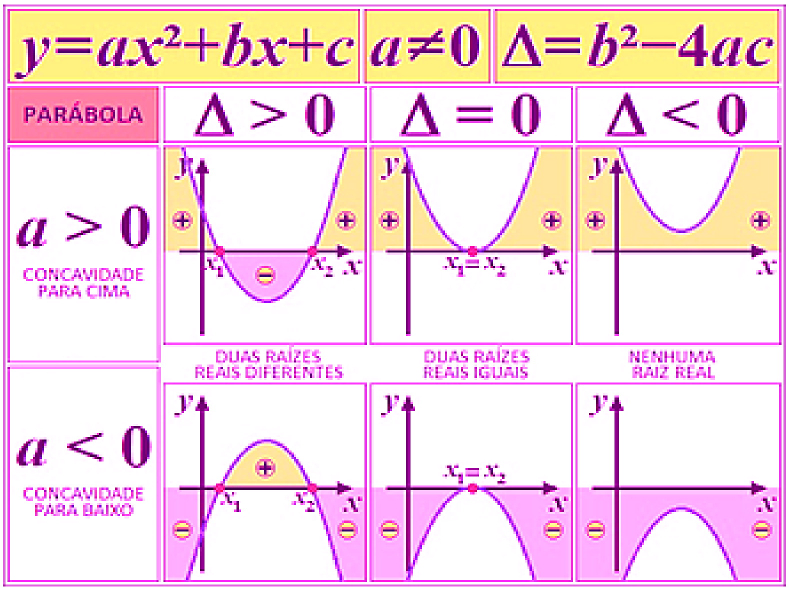
Peça aos estudantes que forneçam mais exemplos de trajetórias curvilíneas. Explique que a **parábola** é um exemplo e que é o objeto de estudo deste módulo. (Não entre em detalhes ainda.) Finalmente, chame a atenção para o fato de que existem muitos outros exemplos de curvas que **não** são parábolas – por exemplo, trajetórias circulares, senoides etc.

B) DESENVOLVIMENTO:

AULA 1

Inicie definindo a função polinomial de segundo grau: $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Deve-se explicar o motivo de se ter a≠0. Em seguida, reapresente para essa função a definição de **raiz** ou **zero,** relembrando a famosa fórmula de Bháskara. É importante apresentar a classificação da parábola conforme o sinal de a e o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Imagem 1 – A parábola de $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.



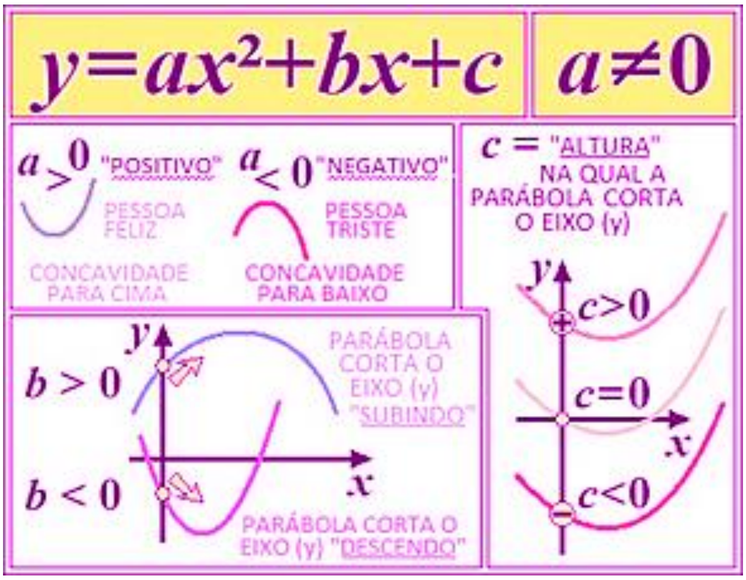
Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Após relembrar e exemplificar a fórmula de Bháskara, apresente a equação da parábola na forma fatorada. De fato, $y = ax^2 + bx + c$ equivale a $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, sendo x_1 e x_2 as raízes. A forma fatorada simplifica a resolução de muitas questões.

AULA 2

Analogamente ao que foi feito para a função polinomial de primeiro grau, apresente e discuta os significados **geométricos** de a, b e c:

Imagem 2 – Significados geométricos de a, b e c.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

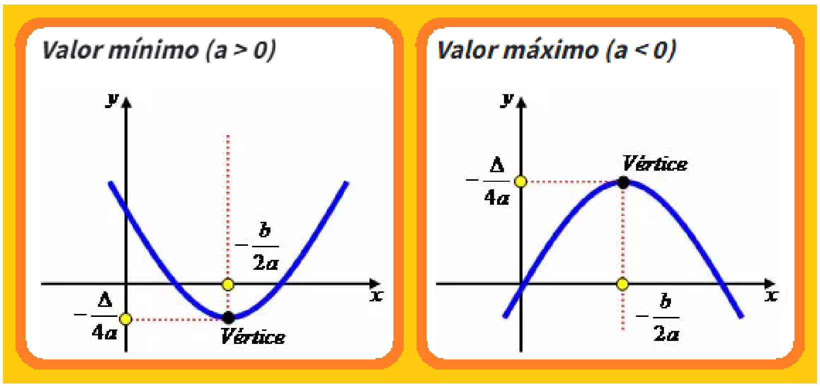
Apresente a ideia do vértice $V(x_V, y_V)$ da parábola.

- Se a parábola tem concavidade para cima: ponto de mínimo.
- Se a parábola tem concavidade para baixo: ponto de máximo.

Ambos os casos devem ser desenhados.

Na sequência, apresente ainda as fórmulas das coordenadas do vértice: $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.

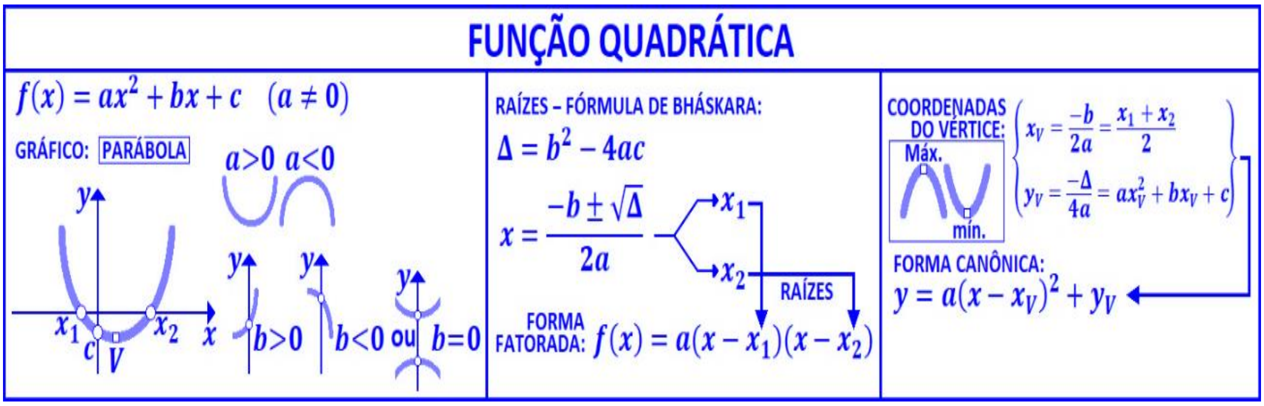
Imagem 3 – O vértice da parábola.



Fonte: (MUNDO EDUCAÇÃO, 2023.)

Finalmente, tendo apresentado a definição de vértice, apresente mais um formato da equação da parábola: a **<u>forma canônica</u>.** De fato, $y = ax^2 + bx + c$ equivale a $y = a(x - x_V)^2 + y_V$, sendo $V(x_V, y_V)$ o vértice. Tal como acontece com a forma fatorada, a forma canônica também simplifica a resolução de muitas questões.

Imagem 4 – Função quadrática – resumo.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

RECURSOS:

Quadro ou lousa, caderno, calculadora, atividades impressas.

Aplicativos para celular ou computador, tais como GeoGebra®, Wolfram Alpha® etc.

PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO:

Ao final desta parte, o estudante deverá ser capaz de realizar os tópicos a seguir:

- Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
- Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.
- Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
- Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
- Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
- Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau.
- Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.

ATIVIDADES

1 – Em relação à função $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, faça o que se pede.

a) Calcule $f(-2)$ e $f(6)$.
b) Calcule $f(-12)$ e $f(16)$.
c) Calcule $f(-102)$ e $f(106)$.

2 – Em relação à função $f(x) = 5x^2 + 39x - 8$, faça o que se pede.

a) Determine as raízes ou zeros da função: x_1 e x_2.
b) Escreva $f(x)$ na forma fatorada: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
c) Determine as coordenadas do vértice: $V(x_V, y_V)$.
d) Escreva $f(x)$ na forma canônica: $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$.
e) Quais valores de y correspondem a $x = 10{,}5$?
f) Quais valores de x correspondem a $y = 10{,}5$?
g) Esboce o gráfico da função.

3 – Encontre a equação da parábola que possui vértice no ponto $V(1, 10)$ e passa pela origem.

4 – Uma parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $A(1, 10)$, $B(2, 5)$ e $C(3, 2)$. Faça o que se pede a seguir.

a) Ache a equação da parábola.
b) Ache suas raízes reais.
c) Ache as coordenadas do vértice.
d) Esboce seu gráfico.

5 – A função $F(x) = Ax^2 + Bx + C$ possui as seguintes propriedades:

– $F(1 - x) = F(1 + x)$ para todo $x \in R$.
– $Im(F) = R_+ = \{y \in R \mid y \geq 0\}$.
– $F(0) = 3$.

Então $A + B + C =?$

a) -3
b) -2
c) -1
d) 0
e) 1

REFERÊNCIAS

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB:** documento de referência do ano de 2001.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: educação infantil e ensino fundamental. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 05 fev. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino fundamental - anos finais. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 05 fev. 2023

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **A parábola de $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Significados geométricos de a,b e c,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Função quadrática – resumo,** Belo Horizonte, 2023.

TÓPICO:	DESCRITOR:
III. Números e Operações. Álgebra e Funções.	D18 - Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela. D21 - Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto. D27 - Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial. D28 - Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial. D29 - Resolver problema que envolva função exponencial.

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: Exponenciais e logaritmos.

DURAÇÃO: 2 aulas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A) CONTEXTUALIZAÇÃO/ABERTURA:

Apresente à turma a progressão geométrica a seguir:

Imagem 1 - Uma P.G. apresenta crescimento exponencial.

1	64	4.096	262.144
2	128	8.192	524.288
4	256	16.384	1.048.576
8	512	32.768	2.097.152
16	1.024	65.536	4.194.304
32	2.048	131.072	8.388.608

Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Faça com que observem quão rapidamente os valores crescem! Informe que esse tipo de crescimento é chamado de crescimento exponencial. Informe ainda que a “operação inversa” da exponencial é o logaritmo e que ambos serão o tema a ser desenvolvido.

B) DESENVOLVIMENTO:

AULA 1

A primeira aula desta parte é sobre exponenciais e a segunda, sobre logaritmos. Para começar, apresente uma revisão geral da exponenciação e suas propriedades.

Imagem 2 - Propriedades da exponenciação.

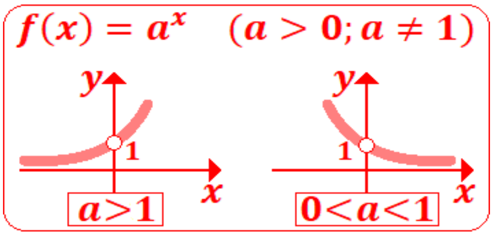
$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^1 = a$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ fatores})$	$(a^m)^n = a^{mn}$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$a^m \cdot b^m = (ab)^m$
$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} \quad (p, q \in \mathbb{N})$	$\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Continuando, defina função exponencial $f(x) = a^x$ $(a > 0; a \neq 1)$ e explique a respeito de:

- Por que é necessário $a > 0; a \neq 1$.
- Nomenclatura, domínio e imagem.
- Formato do gráfico.

Imagem 3 - A função exponencial.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Depois, divida a turma em grupos. Cada grupo terá um tempo para pesquisar sobre uma **aplicação** de função exponencial (geralmente na internet). Depois, cada grupo deverá apresentar aos outros grupos sobre a aplicação escolhida. Tópicos sugeridos incluem:

- Juros compostos.
- Progressão geométrica.
- Crescimento populacional sem fatores limitantes.

Por fim, comente sobre a função exponencial “generalizada”: $f(x) = k \cdot a^x$ $(a > 0; a \neq 1; k \neq 0)$.

AULA 2

Esta é a aula sobre logaritmos. Para começar, apresente a seguinte motivação. Um dos motivos (não o único) para a “invenção” dos logaritmos é isolar uma variável ou expressão presente em um expoente. Se desejar, pode-se exemplificar com a tabela a seguir.

Imagem 4 - A função exponencial.

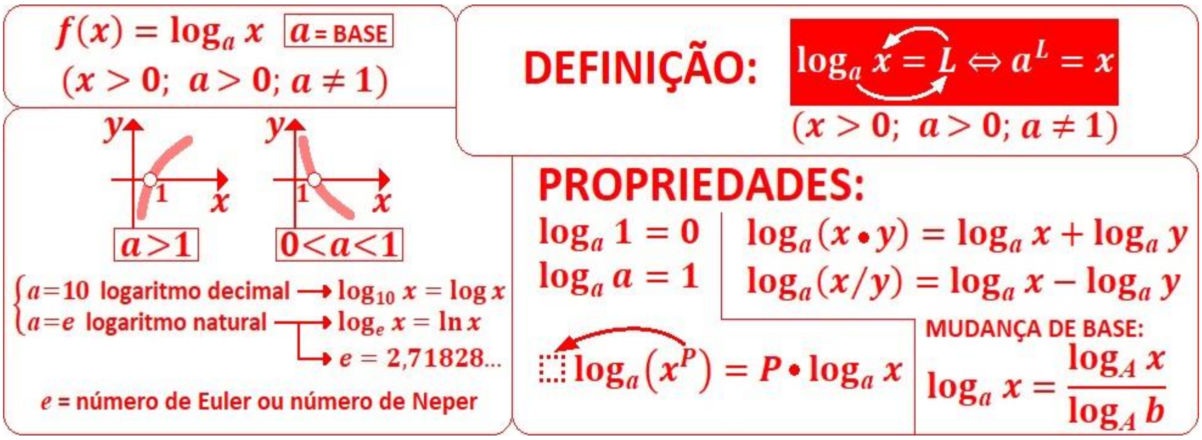
Isole o x:	
$x+2=y$	$x=y-2$
$x-a=10$	$x=a+10$
$3x=11$	$x=\frac{11}{3}$
$\frac{x}{b}=22$	$x=22b$
$x^4=64$	$x=\pm\sqrt[4]{64}=\pm4$
$x^5=243$	$x=\sqrt[5]{243}=3$
$2^x=1024$	$x=10$
$2^x=3000$	$x=???$

Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Continuando, defina função logarítmica $f(x) = x \quad (x > 0; a > 0; a \neq 1)$ e explique a respeito de:

- Por que é necessário $x > 0; a > 0; a \neq 1$.
- Nomenclatura, domínio e imagem.
- Bases especiais
- Formato do gráfico.
- Propriedades.

Imagem 5 -. A função logarítmica.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Depois, divida a turma em grupos. Cada grupo terá um tempo para pesquisar sobre uma **aplicação** de função logarítmica (geralmente na internet). Depois, cada grupo deverá apresentar aos outros grupos sobre a aplicação escolhida. Tópicos sugeridos incluem:

- Escala logarítmica (música, escala Richter, escala MMS).
- Matemática pura e aplicada (números complexos, teoria do caos, fractais).
- Matemática financeira (juros compostos).
- Física ondulatória (intensidade sonora).
- Física moderna (meia-vida, radioatividade, datação por Carbono-14).
- Química (pH, pOH).
- Ciência da computação (desempenho de algoritmos, computação gráfica).
- Economia (moeda, inflação).
- Psicologia (tempo de reação).
- Biologia (espiral logarítmica).

RECURSOS:

Quadro ou lousa, caderno, calculadora, atividades impressas.

Aplicativos para celular ou computador, tais como GeoGebra®, Wolfram Alpha® etc.

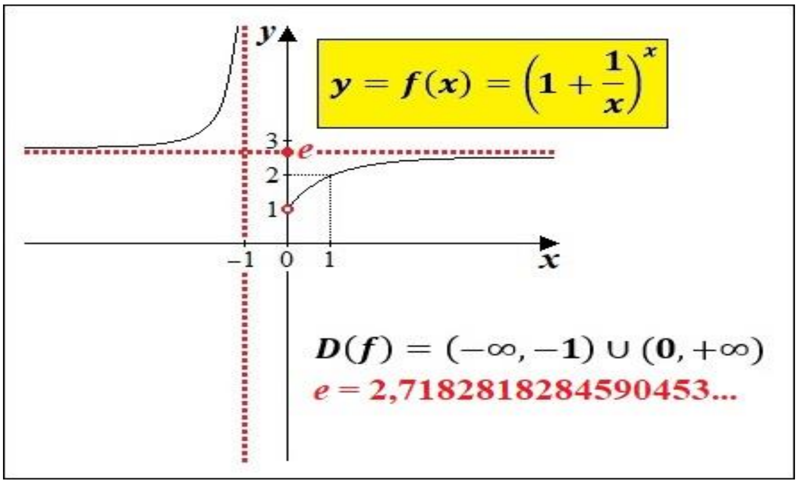
PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO:

Ao final desta parte, o estudante deverá ser capaz de realizar os tópicos a seguir:

- Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
- Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
- Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
- Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.
- Resolver problema que envolva função exponencial.

ATIVIDADES

1 – O número mais importante da Matemática é o número $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$, que representa a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência. O segundo número mais importante da Matemática é o número $e = 2{,}7182818284590453\ldots$ Esse número é chamado de **número de Euler** (pronuncia-se "Óiler") ou **número de Neper** e tem importantes aplicações na Matemática Avançada, Física, Biologia, Ciência da Computação, Economia etc. Nesta atividade, vamos mostrar uma maneira de se calcular o seu valor com algumas casas decimais. Considere esta função:



Quanto mais aumenta o valor de x, tanto mais o valor de $y = f(x)$ se aproxima do valor exato. Utilizando uma calculadora científica, complete os valores da tabela a seguir. Use precisão de nove casas decimais:

x	$y = f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$
1	
10	
100	
1000	
10000	
100000	
1000000	
10000000	
100000000	
1000000000	
10000000000	
$+\infty$	e

2 – Analise a situação a seguir e responda o que se pede. Um capital de R$10.000,00 é aplicado em um banco no sistema de juros compostos. Deseja-se resgatar R$40.000,00. Nesse banco, a taxa é de 2% ao mês (taxa decimal equivalente: 0,02).

a) Se o tempo é um número **inteiro** (em meses), então durante quanto tempo, **no mínimo,** o dinheiro deve ficar aplicado?
b) E se o tempo for um número **decimal?** Quantos meses e quantos dias?

3 – Resolva a equação a seguir:

$$\frac{4^{x(x-4)}}{4^{4(5+x)}} = \frac{1}{10} \quad (x \in \mathbb{R})$$

REFERÊNCIAS

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB:** documento de referência do ano de 2001.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: educação infantil e ensino fundamental. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 05 fev. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino fundamental - anos finais. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 05 fev. 2023

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **A função exponencial,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **A função logarítmica,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Propriedades da exponenciação,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Uma P.G. apresenta crescimento exponencial,** Belo Horizonte, 2023.

TÓPICO:	DESCRITOR:
III. Números e Operações. Álgebra e Funções	D32 - Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples. D33 - Calcular a probabilidade de um evento.

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: A Análise combinatória e probabilidade.

DURAÇÃO: 2 aulas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A) CONTEXTUALIZAÇÃO/ABERTURA:

Se possível, leve para esta aula um bilhete de "loteria" federal – por exemplo, da Mega-Sena. Pergunte a todos: qual a chance de alguém acertar os seis números com apenas uma aposta? Após diversos palpites, leia no verso do bilhete a probabilidade real. Conclusão: a chance verdadeira é muito menor do que a maioria das pessoas imagina. A habilidade de contar possibilidades e calcular probabilidades é o tema desta parte.

B) DESENVOLVIMENTO:

AULA 1

Semelhantemente à parte anterior, esta parte será subdividida em dois grandes temas: o primeiro, análise combinatória; o segundo, probabilidade. Comece fazendo esta importante observação: análise combinatória trata de **número de possibilidades.**

Sugere-se esta ordem para a abordagem da matéria:

- Definir grupamento e possibilidade.
- Mostrar como funciona um diagrama em árvore.
- Explicar os princípios multiplicativo e aditivo.
- Definir, explicar e exemplificar fatorial.
- Dar exemplos de simplificação de expressões envolvendo fatoriais.
- Definir, explicar e exemplificar permutação simples.
- Definir, explicar e exemplificar arranjo simples.
- Definir, explicar e exemplificar combinação simples.
- Relação entre número binomial, triângulo aritmético e combinação.

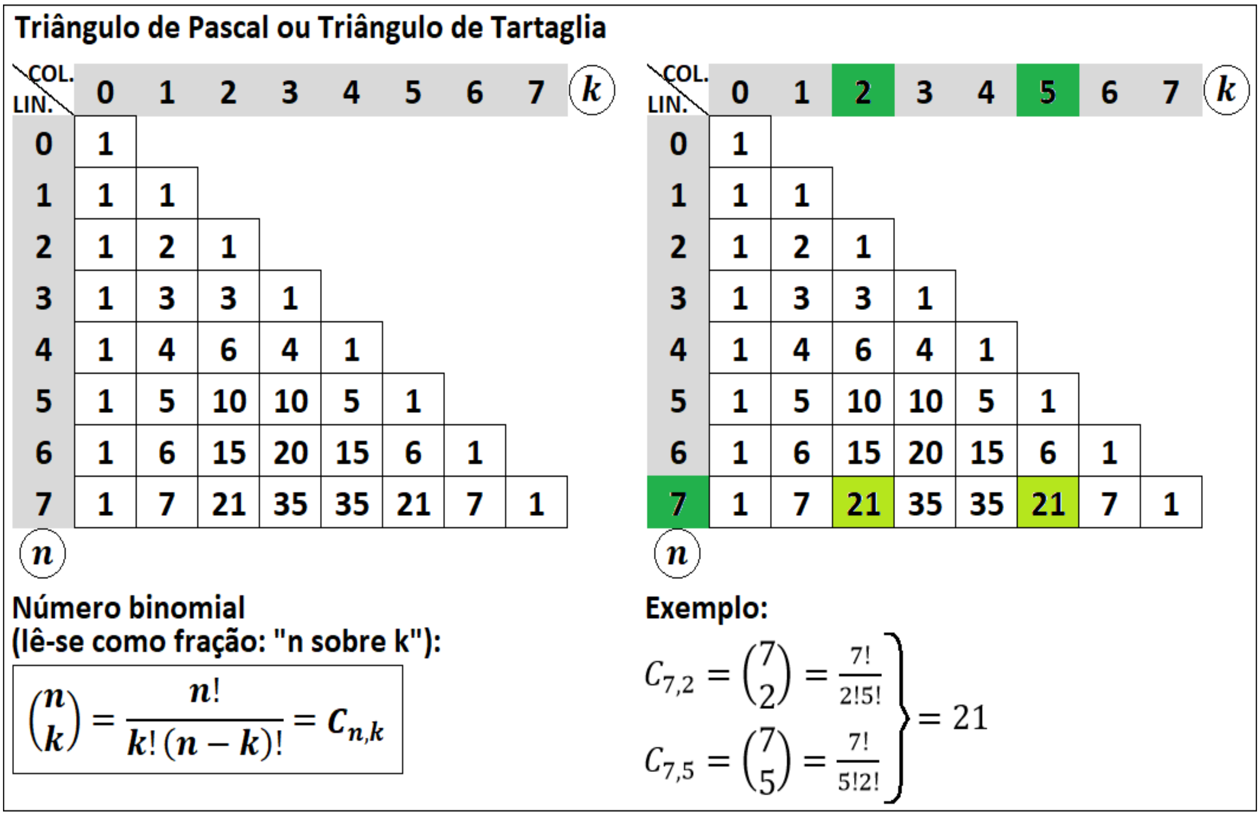
Abaixo tem-se um resumo de análise combinatória. Por completude, o resumo inclui temas não cobertos aqui, como permutação circular e permutação, arranjo e combinação com repetição.

Imagem 1 – Resumo de Análise Combinatória.

Fonte: (WASHINGTON, 2023)

Quanto ao triângulo aritmético (ou triângulo de Pascal ou ainda triângulo de Tartaglia), a imagem a seguir pode ajudar na explicação e na exemplificação:

Imagem 2 – Triângulo de Pascal ou triângulo de Tartaglia.



Fonte: (WASHINGTON, 2023)

AULA 2

Agora, vamos passar para o tema de **probabilidade.** Para começar:

- Defina espaço amostral e espaço amostral equiprobabilístico.
- Defina evento e evento aleatório.
- Explique que uma probabilidade é uma **razão entre duas possibilidades.**

Apresente primeiro a definição informal de probabilidade, que é mais intuitiva:

$$\boxed{P = \frac{\text{quantidade de casos favoráveis}}{\text{quantidade total de casos}}}$$

Faça alguns exemplos para clarear o conceito. Em seguida, apresente a definição formal:

$$\boxed{P = \frac{n(\mathrm{E})}{n(\Omega)}} \quad \text{ou} \quad \boxed{P = \frac{\#\mathrm{E}}{\#\Omega}}$$

E = evento

Ω = espaço amostral

Retome os exemplos anteriores, a fim de mostrar que as definições são equivalentes. Quanto ao **resultado** de um cálculo de probabilidade, é muito importante destacar que:

$$\boxed{0 \leq P \leq 1} \quad \text{ou, em porcentagem:} \quad \boxed{0\% \leq P \leq 100\%}$$

Observação. Uma porcentagem em geral não tem tais restrições, podendo ser negativa ou maior do que 100%. Mas a porcentagem que representa uma probabilidade tem essa restrição! Por exemplo, não faz sentido algum dizer que a chance de algo acontecer seja igual a -5% ou 105%.

RECURSOS:

Quadro ou lousa, caderno, calculadora, atividades impressas.

Aplicativos para celular ou computador, tais como GeoGebra®, Wolfram Alpha® etc.

PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO:

Ao final desta parte, o estudante deverá ser capaz de realizar os tópicos a seguir:

- Conhecer o princípio multiplicativo de contagem.
- Conhecer o princípio aditivo de contagem.
- Resolver problemas de análise combinatória envolvendo permutação simples, arranjo simples ou combinação simples.
- Conhecer espaço equiprobabilístico, espaço amostral e evento, especialmente no caso de eventos independentes.
- Calcular a probabilidade de um evento em casos simples.

ATIVIDADES

1 – Quantos anagramas possui a palavra CEBOLA?

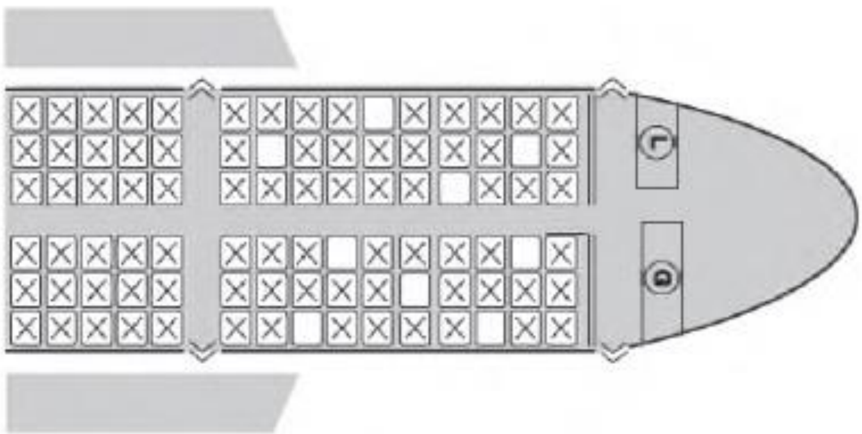
2 – Um sorteio será feito da seguinte maneira. Numa urna estão os dez algarismos de 0 a 9 e quatro deles serão escolhidos para determinar o número da sorte, na seguinte ordem: unidade – dezena – centena – milhar. Quantas possibilidades existem?

3 – Quantas comissões com três pessoas podem ser formadas a partir de um conjunto de oito funcionários de uma empresa?

4 – (ITA). O número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 5$ é:

a) 36
b) 48
c) 52
d) 54
e) 56

5 – (ENEM-2015). Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$

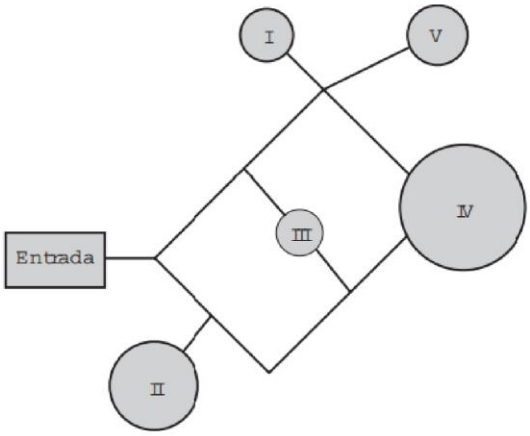
b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$

c) $7!$

d) $\frac{5!}{2!} \times 4!$

e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

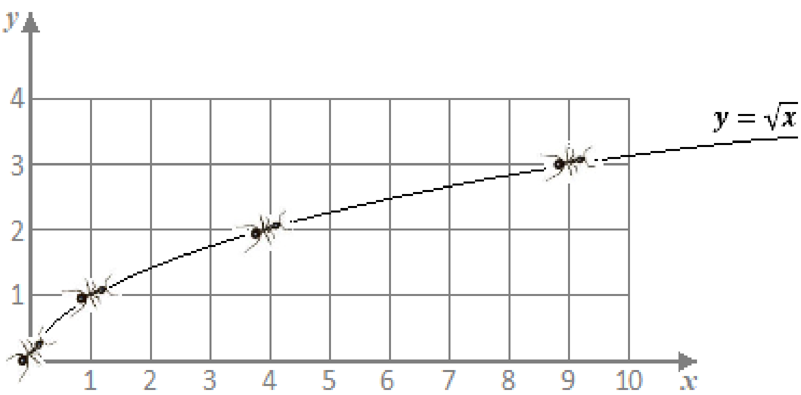
6 – (ENEM-2016). Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna. Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a:

a) 1/96
b) 1/64
c) 5/24
d) 1/4
e) 5/12

7 – Uma formiga encontra-se na origem do plano cartesiano. Estando em um ponto (x, y), ela sempre se move para $(x + 1,\ y \pm 1)$ (duas escolhas). Por exemplo, a partir do ponto $(2, 1)$, ela pode ir ou para o ponto $(3, 0)$, ou para o ponto $(3, 2)$ (somente). De quantas maneiras diferentes ela pode percorrer a sequência de pontos a seguir? De $(0, 0)$ para $(1, 1)$, depois para $(4, 2)$ e terminando em $(9, 3)$?



a) 12
b) 30
c) 72
d) 120
e) 720

REFERÊNCIAS

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB:** documento de referência do ano de 2001.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: educação infantil e ensino fundamental. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 05 fev. 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino fundamental - anos finais. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 05 fev. 2023

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Resumo de Análise Combinatória,** Belo Horizonte, 2023.

WASHINGTON, Alexandre Duarte. **Triângulo de Pascal ou triângulo de Tartaglia,** Belo Horizonte, 2023.

ANEXO

MATERIAL DE APOIO PEDAGÓGICO PARA APRENDIZAGENS – MAPA SAEB
SIMULADO SAEB 2023

ANO	SEGMENTO	COMPONENTE CURRICULAR
3º ano	*Ensino Médio*	*Matemática*

ESCOLA

NOME

PROFESSOR(A)	TURMA

Prezado(a) Estudante,

Você está participando do Simulado de Matemática. Você deverá demonstrar os conhecimentos aprendidos nos anos que já cursou. Com os resultados, os professores irão planejar e desenvolver as atividades escolares. Por isso, responda a todas as questões com bastante atenção.
Cada questão tem somente uma resposta correta. Marque a sua resposta em cada questão e depois transcreva para a Folha de Respostas.

Bom trabalho!

FOLHA DE RESPOSTAS DO SIMULADO DE MATEMÁTICA

01) (A) (B) (C) (D) (E)	10) (A) (B) (C) (D) (E)	19) (A) (B) (C) (D) (E)
02) (A) (B) (C) (D) (E)	11) (A) (B) (C) (D) (E)	20) (A) (B) (C) (D) (E)
03) (A) (B) (C) (D) (E)	12) (A) (B) (C) (D) (E)	21) (A) (B) (C) (D) (E)
04) (A) (B) (C) (D) (E)	13) (A) (B) (C) (D) (E)	22) (A) (B) (C) (D) (E)
05) (A) (B) (C) (D) (E)	14) (A) (B) (C) (D) (E)	23) (A) (B) (C) (D) (E)
06) (A) (B) (C) (D) (E)	15) (A) (B) (C) (D) (E)	24) (A) (B) (C) (D) (E)
07) (A) (B) (C) (D) (E)	16) (A) (B) (C) (D) (E)	25) (A) (B) (C) (D) (E)
08) (A) (B) (C) (D) (E)	17) (A) (B) (C) (D) (E)	26) (A) (B) (C) (D) (E)
09) (A) (B) (C) (D) (E)	18) (A) (B) (C) (D) (E)	

01 - Em uma competição esportiva, uma equipe de atletismo possui 6 corredores para participar de uma prova de revezamento. A equipe precisa selecionar 4 desses corredores para formar a equipe que irá competir na prova. Além disso, eles devem determinar a ordem em que cada corredor irá correr.

Qual é o número total de possibilidades para a equipe de atletismo escolher os 4 corredores para competir e organizar a ordem em que cada um irá correr?

A) 15 possibilidades.
B) 30 possibilidades.
C) 270 possibilidades.
D) 360 possibilidades.
E) 380 possibilidades

02 - Um arquiteto está projetando uma escultura para um parque da cidade. Ele deseja criar uma estrutura poliédrica que seja esteticamente agradável e única. Para isso, ele precisa compreender a relação entre o número de vértices, faces e arestas de um poliedro.

Considerando essa situação, responda:

Qual das seguintes opções representa corretamente a relação entre o número de vértices (V), faces (F) e arestas (A) de um poliedro convexo?

A) V + F = A + 2
B) V + A = F + 2
C) F + A = V + 2
D) V + F + A = 2
E) V + F - A = 2

03 - Em uma empresa, o setor de Recursos Humanos identificou que, nos últimos meses, o número de funcionários insatisfeitos com o ambiente de trabalho aumentou significativamente. Ao realizar uma pesquisa interna, constatou-se que 38% dos colaboradores estão insatisfeitos. Para melhorar essa situação, a empresa pretende implementar um programa de bem-estar para seus funcionários.

Considerando a porcentagem de funcionários insatisfeitos, quantos colaboradores estão descontentes com o ambiente de trabalho, se a empresa possui um total de 450 funcionários?

A) 81
B) 126
C) 171
D) 186
E) 196

04 - Um reservatório de água tem a forma de um cilindro circular reto e deve ser construído para armazenar água em uma comunidade. O projeto requer que o reservatório tenha capacidade para armazenar 2400 metros cúbicos de água. O engenheiro responsável precisa calcular as dimensões ideais para o reservatório.

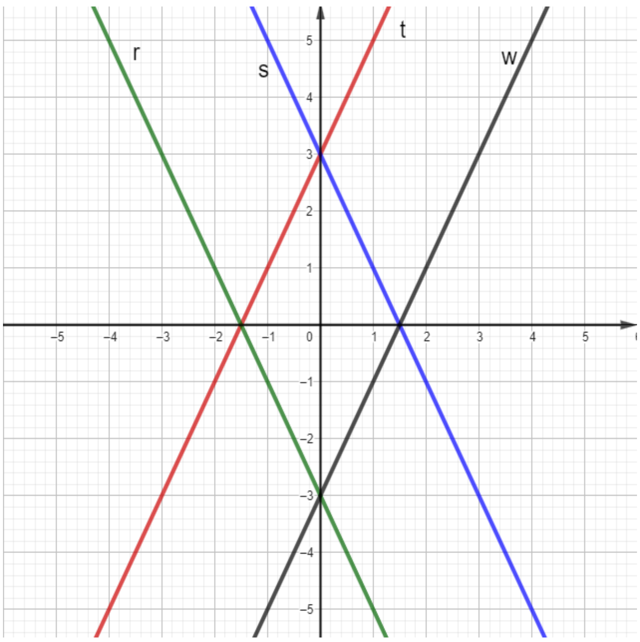
Com base nas informações fornecidas, qual é a altura e o raio do cilindro necessário para atingir a capacidade de armazenamento desejada? Utilize $\pi = 3$.

A) Altura = 8 metros e raio = 5 metros
B) Altura = 6 metros e raio = 10 metros
C) Altura = 8 metros e raio = 10 metros
D) Altura = 6 metros e raio = 5 metros
E) Altura = 10 metros e raio = 8 metros

05 - Um grupo de estudantes do 3º ano do ensino médio está estudando funções polinomiais de 1º grau e seus gráficos. A professora propôs um exercício para avaliar a compreensão dos alunos sobre o tema, no qual ela apresentou a função polinomial:

$$f(x) = 2x + 3$$

Abaixo, no plano cartesiano, estão representadas quatro retas.

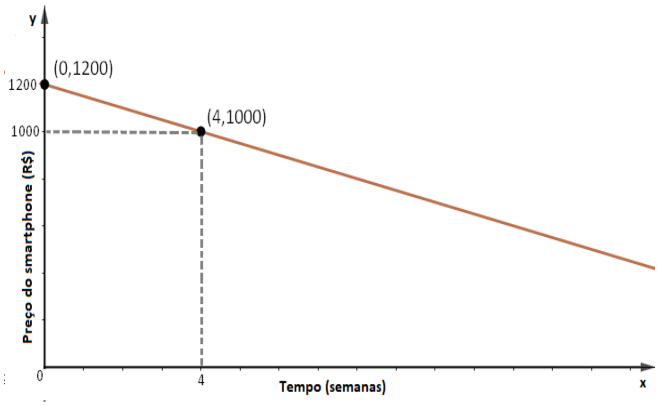


Qual delas representa a função apresentada pela professora?

A) reta r
B) reta s
C) reta t
D) reta w
E) NDA

06 - João está planejando comprar um novo smartphone e foi a uma loja que oferece uma promoção especial. O valor original do smartphone era de R$ 1.200,00, mas ele percebeu que o preço estava diminuindo ao longo do tempo. Para entender melhor a situação, João decidiu fazer um acompanhamento do preço por algumas semanas. Ele registrou os preços e as semanas correspondentes em que visitou a loja.

Abaixo está o gráfico que representa a relação entre o tempo (semanas) e o valor do smartphone (em reais):



Com base no gráfico apresentado e nos conhecimentos sobre funções do 1º grau, responda:

Qual é a representação algébrica da função que relaciona o valor do smartphone (y), em reais, com o tempo (x), em semanas?

A) $f(x) = 1200 - 50x$
B) $f(x) = 1200 + 50x$
C) $f(x) = 50x - 1200$
D) $f(x) = 1200x - 50$
E) f(x) = 50x + 1200

07 - Um grupo de estudantes do 3º ano do ensino médio realizou um experimento para investigar o crescimento da população de bactérias em um ambiente controlado. Eles registraram o número de bactérias presentes em uma cultura em intervalos de tempo regulares e organizaram os dados na seguinte tabela:

TEMPO (horas)	NÚMERO DE BACTÉRIAS
0	100
1	200
2	400
3	800
4	1600

Com base nos dados obtidos, os estudantes desejam reconhecer a expressão algébrica que representa o crescimento da população de bactérias ao longo do tempo. Qual das alternativas abaixo representa corretamente a expressão que descreve essa função?

A) $N(t) = 100 \times 2^t$
B) $N(t) = 100 \times t^2$
C) $N(t) = 200 \times t$
D) $N(t) = 100 \times t + 200$
E) $N(t) = 100 \times 2t + 200$

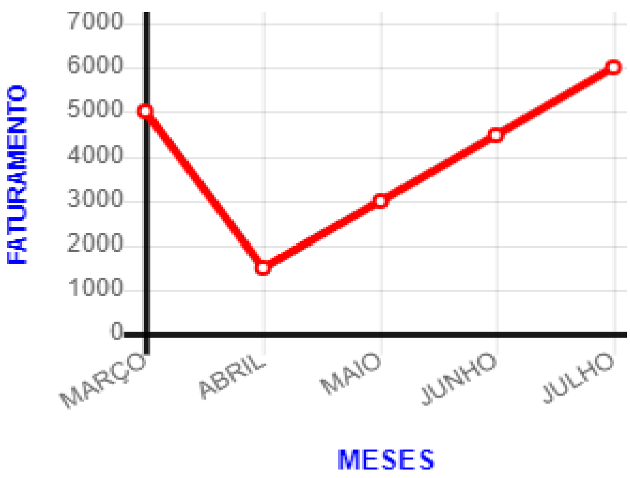
08 - Uma empresa de tecnologia lançou um novo programa de fidelidade para seus clientes. Nesse programa, os pontos acumulados pelos clientes seguem uma progressão aritmética (P.A.). O termo geral da P.A. é dado pela fórmula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, onde "$a_n$" representa o valor do termo geral, "a_1" é o primeiro termo e "r" é a razão.

Maria aderiu ao programa e acumulou 300 pontos em seu primeiro mês de participação. No segundo mês, ela obteve 340 pontos. Com base nas informações fornecidas, responda:

Qual será a pontuação acumulada de Maria no quarto mês de participação no programa de fidelidade?

A) 380 pontos
B) 400 pontos
C) 420 pontos
D) 440 pontos
E) 480 pontos

09 - (SAEPE) O gráfico abaixo mostra o faturamento mensal em reais de uma confecção durante cinco meses de um determinado ano.



A tabela que melhor representa os dados apresentados nesse gráfico é

A)

Meses	Faturamento
Março	5 000
Abril	1 500
Maio	3 000
Junho	4 500
Julho	6 000

B)

Meses	Faturamento
Março	5 000
Abril	1 500
Maio	2 000
Junho	4 500
Julho	6 000

C)

Meses	Faturamento
Março	6 000
Abril	4 500
Maio	3 000
Junho	1 500
Julho	5 000

D)

Meses	Faturamento
Março	6 000
Abril	4 500
Maio	3 000
Junho	1 500
Julho	5 000

E)

Meses	Faturamento
Março	5 000
Abril	1 500
Maio	4 500
Junho	3 000
Julho	6 000

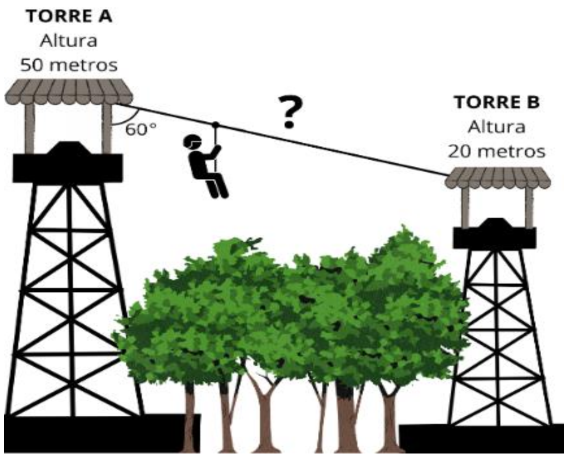
10 - Em uma aula de matemática avançada, o professor apresentou aos alunos o conceito de sistemas lineares e suas representações matriciais. João, um aluno do 3º ano do ensino médio, ficou empolgado com o novo conteúdo e decidiu resolver um sistema linear utilizando matrizes 3x3. Abaixo está o sistema que ele encontrou:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 19 \\ 4x - 3y + 2z = 17 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

Qual é a solução encontrada por João ao resolver o sistema de equações?

A) $x = 4$, $y = 1$ e $z = 3$
B) $x = 3$, $y = 1$ e $z = 4$
C) $x = 1$, $y = 3$ e $z = 4$
D) $x = 3$, $y = 4$ e $z = 1$
E) $x = 3$, $y = 4$ e $z = 2$

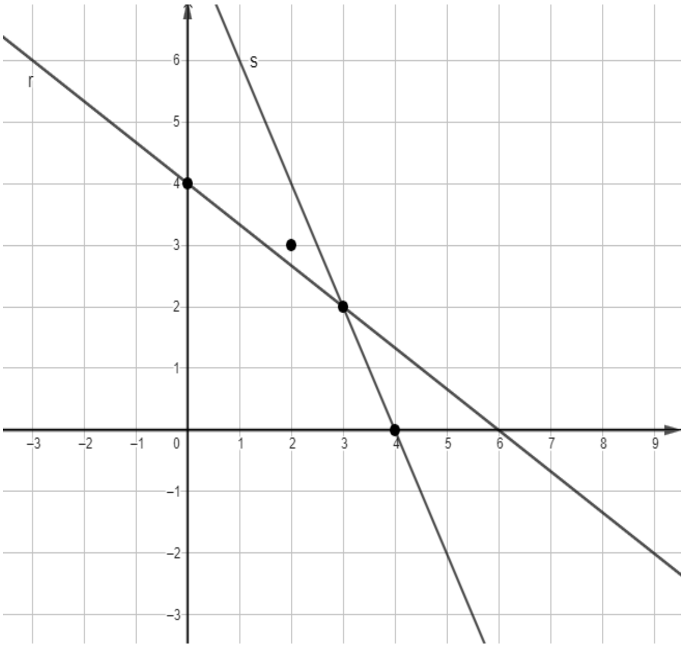
11 - Uma pessoa está prestes a descer de uma tirolesa que liga uma torre A de 50 metros de altura a uma torre B de 20 metros de altura. Ao descer de uma tirolesa da torre A para a torre B, a pessoa percebe que o ângulo formado pela inclinação do cabo de aço com a torre A é de 60°.



Com base nessas informações e na imagem acima, qual é o valor, aproximado, do comprimento do cabo de aço?

A) 55 metros
B) 58 metros
C) 60 metros
D) 62 metros
E) 64 metros

12 - Considere um sistema de equações representado no plano cartesiano abaixo, com as retas 'r' e 's', e alguns pontos destacados.



o ponto que corresponde à única solução do sistema de equações formado pelas retas r e s é

A) $(0, 4)$
B) $(4, 0)$
C) $(2, 3)$
D) $(3, 2)$
E) (3, 1)

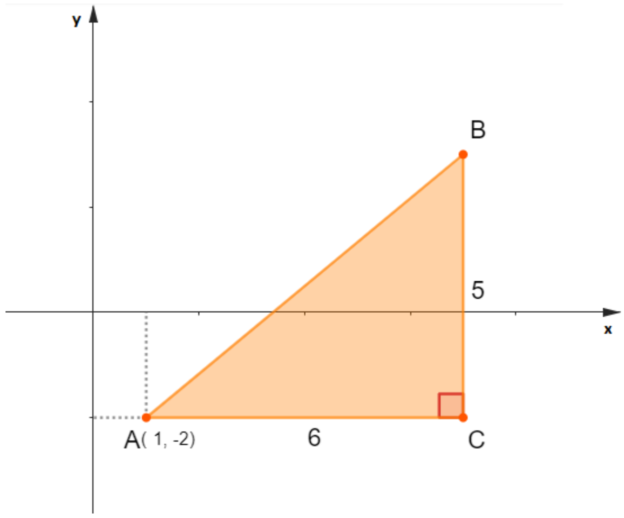
13 - Um projétil é lançado verticalmente, a partir do solo, e sua altura h (em metros) em relação ao solo, no tempo t (em segundos), é dada pela equação do 2º grau:

$$h = -5t^2 + 50t$$

Qual será o tempo necessário para que o projétil atinja a altura de 125 metros durante o seu lançamento?

A) 5 segundos
B) 6 segundos
C) 7 segundos
D) 8 segundos
E) 10 segundos

14 - Em um plano cartesiano, encontra-se um triângulo retângulo com a hipotenusa representada pelo segmento AB. O vértice A é definido pelas coordenadas (1, -2), enquanto o segmento AC possui comprimento 6 unidades e o segmento BC mede 5 unidades.



A alternativa que corretamente representa as coordenadas dos vértices B e C é

A) $B(7, 2)$ e $C(7, -2)$
B) $B(7, 3)$ e $C(6, -2)$
C) $B(7, 2)$ e $C(6, -2)$
D) $B(7, 3)$ e $C(7, -2)$
E) $B(7, -3)$ e $C(7, -2)$

15 - Clara está organizando um evento para arrecadar fundos para a sua escola. Ela está planejando uma rifa, na qual venderá ingressos numerados e sorteará um prêmio emocionante entre os participantes. O prêmio é um tablet novinho em folha.

Suponha que Clara tenha vendido 50 ingressos numerados para a rifa do tablet. Qual é a probabilidade de um aluno, ao comprar 5 ingressos, ganhar o tablet nessa rifa?

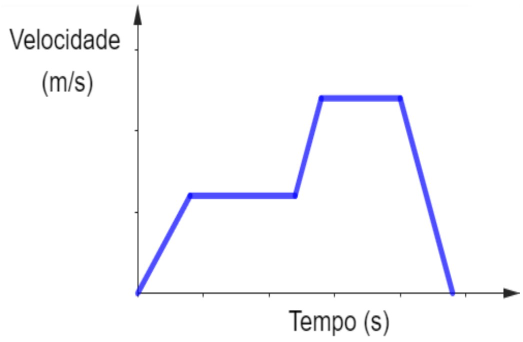
A) 1%
B) 2%
C) 5%
D) 10%
E) 15%

16 - O texto abaixo descreve o movimento de um carro em uma estrada reta.

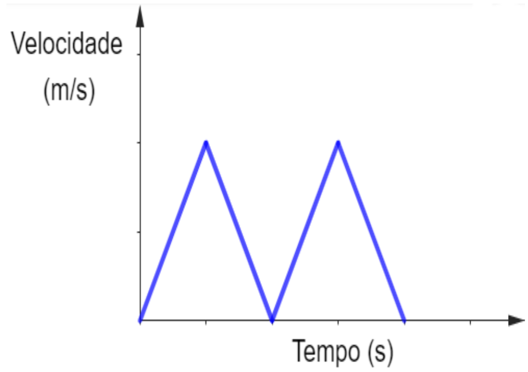
Inicialmente, o carro está parado e, em seguida, começa a acelerar gradualmente. Ele atinge uma velocidade constante e mantém essa velocidade por um tempo. Finalmente, o motorista começa a frear suavemente até o carro parar completamente.

Identifique o gráfico que melhor representa o movimento descrito no texto:

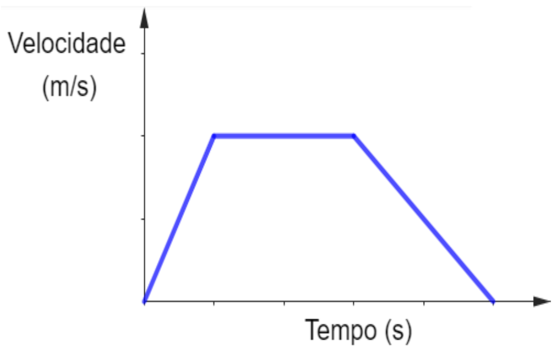
A)



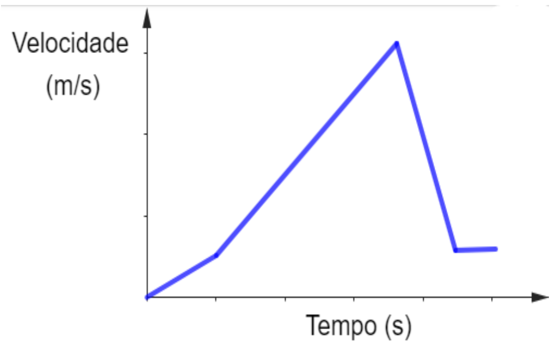
B)



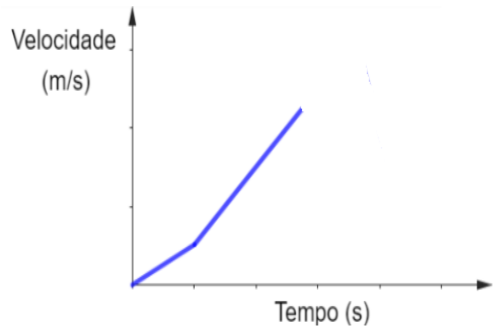
C)



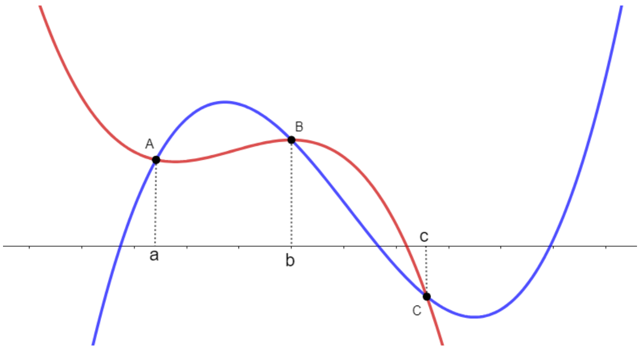
D)



E)



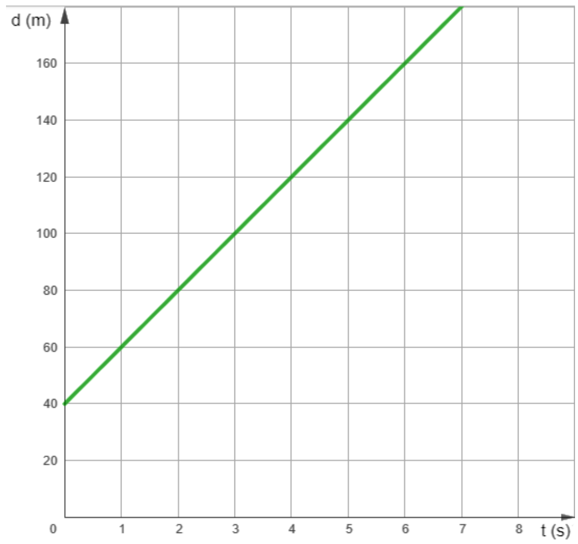
17 - No plano cartesiano fornecido, estão plotadas duas funções distintas que se cruzam em três pontos de interseção. Cada um desses pontos é definido pela sua coordenada no eixo das abscissas.



Em qual intervalo essas duas funções demonstram comportamento decrescente simultaneamente?

A) $]-\infty, a]$
B) $[a, b]$
C) $[b, c]$
D) $[c, +\infty[$
E) $[c, -\infty[$

18 - Um grupo de estudantes está analisando a trajetória de um carro em um gráfico cartesiano, onde o eixo horizontal representa o tempo em segundos e o eixo vertical representa a distância percorrida em metros. Eles obtiveram a equação da reta que melhor descreve essa trajetória: $d = 20t + 40$, onde d é a distância percorrida, em metros, e t é o tempo transcorrido, em segundos.



Com base nessa equação, como os coeficientes estão relacionados geometricamente com a trajetória do carro?

A) O coeficiente 20 representa a distância inicial do carro, enquanto o coeficiente 40 indica a velocidade em metros por segundo.
B) O coeficiente 40 indica a distância inicial do carro, enquanto o coeficiente 20 representa a velocidade em metros por segundo.
C) O coeficiente 20 representa a aceleração do carro, enquanto o coeficiente 40 indica a posição inicial em metros.
D) O coeficiente 40 indica a aceleração do carro, enquanto o coeficiente 20 representa a posição inicial em metros.
E) O coeficiente 40 indica a aceleração do carro, enquanto o coeficiente 40 representa a posição inicial em metros.

19 - Em relação à localização de números reais na reta numérica, identifique a alternativa correta:

A) O número real $-\sqrt{5}$ está localizado à direita do número -2.
B) O número real $\sqrt{2}$ está localizado entre os números racionais $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$.
C) O número real $\sqrt{17}$ está localizado à esquerda do número 4.
D) O número real $\sqrt{3}$ está localizado entre os números inteiros 2 e 3.
E) O número real $\sqrt{3}$ está localizado entre os números inteiros 1 e 2.

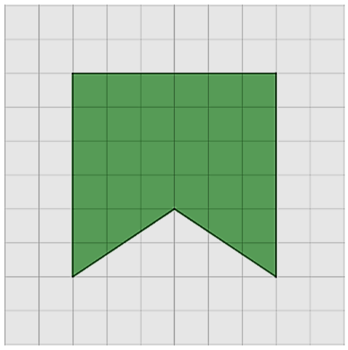
20 - Um agricultor está planejando cultivar uma plantação de cenouras em seu campo. Ele percebeu que a quantidade de água utilizada para irrigação está diretamente relacionada com a quantidade de cenouras colhidas. Após realizar alguns experimentos, o agricultor coletou os seguintes dados:

Quantidade de água (em litros)	Quantidade de cenouras colhidas
5	10
8	16
12	24
15	30
20	40

Com base nos dados apresentados, o agricultor deseja calcular a quantidade de cenouras que poderá colher se utilizar 25 litros de água para irrigação. Qual é o número aproximado de cenouras que ele poderá colher com essa quantidade de água?

A) 20 cenouras.
B) 35 cenouras.
C) 45 cenouras.
D) 50 cenouras.
E) 55 cenouras

21 - A Maria está se preparando para a festa junina e decidiu confeccionar bandeirinhas para decorar a sua barraca. Ela desenhou a bandeirinha em uma malha quadriculada, onde cada quadradinho possui 2 cm de lado. A figura da bandeirinha é composta por dois triângulos retângulos e um retângulo, como mostrado na imagem abaixo:



Qual é a área da bandeirinha que a Maria precisa calcular para saber quanto de papel de seda ela vai precisar para confeccioná-la?

A) 120 cm²
B) 128 cm²
C) 136 cm²
D) 144 cm²
E) 256 cm²

22 - Clara trabalha em uma loja de eletrônicos e recebe um salário mensal fixo, além de uma comissão por cada produto que ela vende. Sua função de ganhos mensais pode ser representada pela equação linear $f(x) = 1200 + 50x$, onde "x" é o número de produtos que ela vendeu no mês. Com base nisso, responda:

Qual a quantidade de produtos que Clara deverá vender no mês para ganhar R$ 2.100,00?

A) 18
B) 26
C) 34
D) 42
E) 46

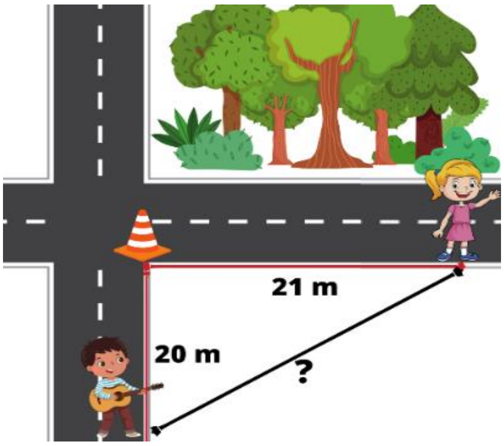
23 - (SAEPE) No jardim de um determinado parque, existe um tipo de vegetação rasteira que, no 1º mês após o plantio, ocupava 2 m² de área verde. A função descrita no quadro abaixo permite calcular a medida da área S(t) ocupada por essa vegetação daqui a t meses.

$$S(t) = 2 + log_2 t$$

Qual será a medida da área ocupada, em m², por essa vegetação daqui a 1 ano e 4 meses?

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 9

24 - Igor encontra-se a uma distância de 20 metros de um cone posicionado no cruzamento central de sua cidade. Enquanto isso, sua amiga Luciana está localizada em uma rua perpendicular a 21 metros do mesmo cone.



Qual é o comprimento, em metros, da linha reta entre os dois amigos?

A) 22
B) 29
C) 39
D) 41
E) 42

25 - Uma empresa de transporte público coletou dados sobre o número de passageiros que utilizaram seus serviços durante uma semana. Esses dados foram organizados em uma tabela, conforme abaixo:

DIA DA SEMANA	NÚMERO DE PASSAGEIROS
Segunda-feira	350
Terça-feira	420
Quarta-feira	380
Quinta-feira	460
Sexta-feira	500
Sábado	280
Domingo	200

Com base nas informações apresentadas na tabela, qual foi a média de passageiros por dia durante essa semana?

A) 320
B) 370
C) 420
D) 450
E) 460

26 - Em uma aula de Geometria Analítica, os estudantes estão explorando as equações da circunferência e sua representação gráfica. O desafio proposto pelo professor consiste em determinar entre as opções fornecidas quais delas realmente representam circunferências.

As equações são:

- Equação 1 => $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$
- Equação 2 => $2x^2 + 2y^2 - 8x + 6y + 25 = 0$
- Equação 3 => $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y - 36 = 0$

Das três equações apresentadas, quais são as que verdadeiramente descrevem uma circunferência?

A) Equações 1 e 2.
B) Equações 1 e 3.
C) Equações 2 e 3.
D) Equações 1 e 3.
E) Todas.